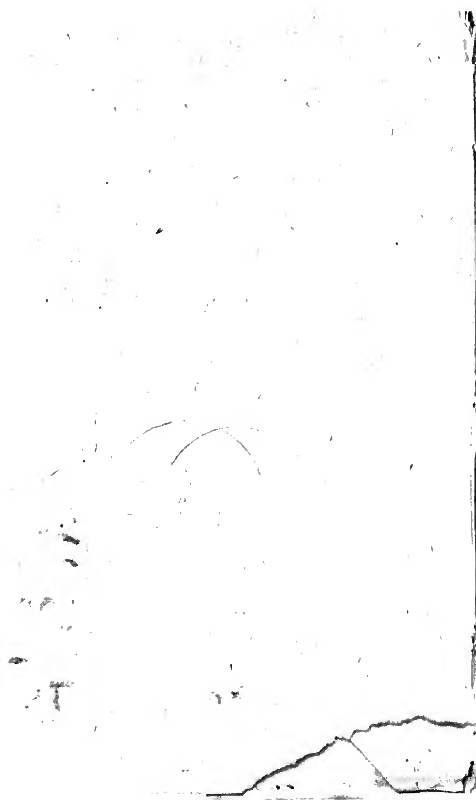




EVCLIDIS ELEMENTORVM *LIBRI SEX* PRIORES.

Quorum demõstrationes tum alibi sparsim, tum maximè libro quinto ad faciliorem captum accommodauit

CAROLVS MALAPERTIVS Montensis è Societate IESV.

Coll. Rom. Soc. Jesu



Inscript.





DVACI,

Typis BALTAZARIS BELLERI sub Circino Aureo

ANNO 1620.

IVVENTVTI
MATHEMATVM STVDIOSÆ
In Academia Duacensi.

HAbetis ad manum, Iuuenes ornatissimi, Euclidis Elementa sex priora, hoc est Geometriæ, atque adeo Mathematum omnium fundamenta: in quibus explicandis si cuipiam videbor nonnulla subticendo minus accuratè Mathematicæ demõstrationis numeros omnes explere, is velim intelligat non Sophistis reuincendis, qui de industria velint in luce cæcutire, sed docilibus ingenijs & veritatis amantibus scribere me instituisse. Quibus profecto nescio an mediocri breuitate obscuriora fiant Mathemata, an molestiora nimia quorundam accuratione, qui seu lectorum ingenio, seu beneuolentiæ diffisi satis per sese obuia inculcant anxie, & ne quid omissum videatur, tot in vnum ratiocinationes congerunt, quot simul mente complecti sit difficillimum. Id non alibi magis quã in libro quinto licebit intueri, si cui fuerit oportunum alios passim commentarios cum hoc nostro conferre. Cum enim eius libri Theoremata in



omnem Mathematicæ partem vim habere amplissimam cernerem, non dubitaui quin proximè cum primis naturæ pronuntiatis cohærerent, eaque proinde noua methodo ad prima statim principia reuocaui, à quibus minimum discessissent. Quid enim attinebat per Multiplicium,& probationum flexus Tyronem circumducere, si propositis clare terminorum notionibus ad ipsam quamprimum veritatem magno compendio poterat penetrare? Hoc sane consilium meum vtvt accipiant alij, vobis tamen Auditoribus meis vsu ipso facile probaturum esse confido. Satis vero amplum mihi theatrum estis; neque aliud propositum fuit in hoc opere recudendo, quam vestris seruire commodis, & eam, quæ mihi obtigit, Spartam ornare pro virili; ad cæteros si quid manabit emolumenti, ponatur in lucro. Vos interim, vti spero, laborem hūc meum, animum certe vestræ vtilitatis studiosissimum æqui bonique consuletis. Valete.

Tua intererit, amice Lector, prçcipua Typographorum errata ad calcem libri notata præuidisse: leuiora facile emendabis, etsi nullus moneam.

Ego infra scriptus Societatis IESV Prouincialis in Prouincia Gallo-Belgica iuxta priuilegiū à Serenissimis Principibus nostris ALBERTO & ISABELLA eidem Societati nostræ concessum, quo omnibus prohibetur ne libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos, absque Superiorum permissione imprimant; facultatem do Baltazaro Bellero Typographo Duacensi, vt librum cui titulus est, Commentarius in priores sex libros Elementorū Euclidis, & Institutiones Arithmeticæ practicę CAROLI MALAPERTII è Societate IESV, ad Sex annos proximos imprimere & libere distribuere possit. Datum Tornaci 9. Nouembris 1619.

FLORENTIVS DE MONTMORENCI.

APPROBATIO.

Hic liber continens Euclidis Elementorum libros sex priores: Item Oratio R. P. CAROLI MALAPERTII de laudibus Mathematicæ nihil habet quod fidem concernat, eiuè aducrsetur. Datum Duaci 20. Decembris 1619.

GEORGIVS COLVENERIVS S. *Theologiæ Doctor & Professor, & librorum in Acade. Duacena censor.*

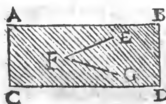
EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER I.

Defini-

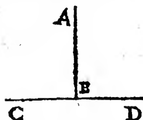
Definitiones.

1 Punctum est cuius pars nulla.
2 Linea longitudo latitudinis expers.
3 Lineæ extrema sunt puncta.
4 Linea recta est quæ ex æquo suis punctis, seu extremis interiacet: *Siue, cuius extrema obumbrant omnia media.*
5 Superficies est quæ longitudinem tantum habet.
6 Superficiei extrema sunt lineæ.
7 Plana superficies est quæ ex æquo suis extremis interijcitur.



8 Planus angulus est duarum linearum in plana superficie se tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.
vt planus angulus est E F G; quia in plana superficie A B C D linea E F G F, se tangunt in puncto F, & non iacent in directum siue non efficiunt vnam rectam lineam, sed ad se mutuo inclinantur, vt constituant angulum E F G.

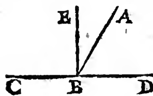
9 Rectilineus angulus est qui rectis lineis constituitur.



10 Quando certa super certam cōsistēs çquales vtrimque angulos fecerit, rectus est vterque angulorum æqualium: quæ autem alteri insistit, dicitur linea perpendicularis.

Sic linea A B insistens ipsi C D est eidem perpendicularis, quia angulos qui sunt deinceps A B C, A B D efficit æquales, & vterque angulus idcirco est rectus,

11 Obtusus angulus est, qui maior est recto.

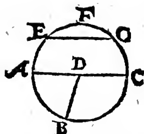


12 Acutus, qui recto minor. *Vt obtusus angulus est A B C maior recto E B C, acutus vero & recto minor est A B D.*

13 Terminus est quod cuiusque est extremum.

14 Figura est quæ sub aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

15 Cir-



15 Circulus eſt figura vnicæ lineæ termino contenta, quam circumferentiam ſeu ambitum dicunt; & ad quam lineam ex aliquo puncto intra contento omnes lineæ ſunt ęquales.

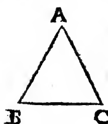
16 Punctum autem illud dicitur centrum. *In circulo A B C F centrum eſt D, ex quo lineæ D A, D B, D C ad ambitum ductæ, & omnes aliæ ſunt æquales.*

17 Diameter circuli eſt recta per centrum acta, & ad ambitum vtrumque terminata. *Cuiuſmodi eſt A D.*

18 Semicirculus eſt figura comprehēſa à diametro & parte circumferentiæ, quæ diametro clauditur. *vt A B C.*

19 Segmentum circuli eſt, quod à recta linea & circūferentia continetur, *quale eſt E F G.*

20 Rectilineæ figuræ ſunt quæ rectis lineis continentur, Trilateræ quæ tribus, Quadrilateræ quæ quatuor, Multilateræ quæ pluribus.



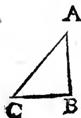
21 Trilaterarum autem figurarum Triangulum æquilaterum eſt, quod tria latera habet æqualia. *Quale eſt triangulum ABC.*



22 Iſoſceles ſeu æquicrus aut æquicrurum, quod duo tantum latera aut crura habet æqualia. *Quale eſt triangulum DEF, in quo duo tãtum latera DE, DF, ſunt æqualia.*

23 Scalenum triãgulũ eſt quod omnia tria latera habet inequalia; *vt GHK.*





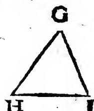
24 Rectangulum triangulum eſt quod continet angulum rectum. *Tale eſt ABC in quo angulus B eſt rectus.*

25 Am-

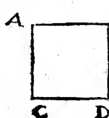


25 Ambligoniũ seu obtusangulum, quod angulũ habet obtusũ.

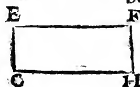
Tale est DEF in quo angulus E est obtusus.



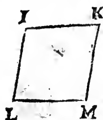
27 Oxygoniũ seu acutangulum quod tres acutos habet angulos, *Quale est GHI.*



27 Inter Quadrilateras Quadratũ est, quod æquilaterum est & æquiangulum, seu quod & latera & angulos habet æqualia. *vt ABCD.*

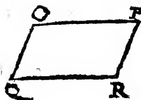


28 Altera parte longius figura est æquiangula quidẽ, at non æquilatera: *EFGH.*

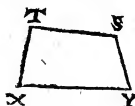


29 Rhombus est figura æquilatera non tamen æquiangula: IKLM.

 30 Rhom



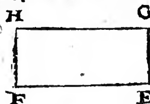
30 Rhõboides quæ opposita latera & angulos ęquales habet, non tamen aut omnia latera aut omnes angulos habet ęquales OPQR.



31 Aliæ verò figuræ quęcunque quadrilateræ vocẽtur Trapezia. Quæ irregulares sunt & infinitę. STYX &c.



32 Parallelæ lineæ sunt quæ in eodem plano existentes, productæ in infinitum neutrã in partem coincident. *Seu quæ pari vbique spatio inter se distant, vt lineæ AB,CD.*



Parallelogrãmum verò est figura quadrilatera lineis parallelis descripta. *Vt figura E F G H est parallelogrammum quia describitur lineis E F, G H parallelis, & lineis E G F A similiter parallelis.*

Postu-

Postulata.

1 Petatur à quouis puncto ad aliud quodlibet rectam lineam ducere posse.
2 Terminatam & rectam lineam in directum & continuum protendere.
3 E quouis centro ad quoduis interuallum circulum describere.

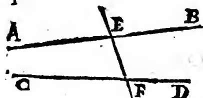
Communes notiones seu Axiomata.

1 Quæ eidem sunt ęqualia, & inter se sunt æqualia.
2 Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.
3 Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanent erunt æqualia.*
4 Si inęqualibus adijciantur ęqualia, tota erunt inęqualia.
5 Si ab inæqualibus tollantur ęqualia, quæ remanent erunt inæqualia.
6 Quæ eiusdem dupla sunt, inter se sunt æqualia.
7 Quæ eiusdem sunt diuida sunt inter se æqualia.
8 Quæ mutuo sibi congruunt, sunt

æqualia inter se.

9 Totum est maius sua parte.

10 Omnes anguli recti sunt inter se æquales.



11 Si in duas rectas recta incidẽs angulos interiores & ad easdem partes duabus rectis minores fecerit, coincident duæ illę lineę, protractæ in illam partem, ad quam spectant duo anguli minores rectis. *Ut si in rectas A B C D, cadens recta E F faciat angulos internos & ad eandem partem A E F E F C minores duabus rectis, coincident illæ lineę protractæ versus partem A C.*

12 Duę rectę spatium non comprehẽdunt.

13 Partes omnes simul sumptę suo toti sunt æquales, & totum æquale est suis omnibus partibus.

Propositionum aliæ faciendum aliud proponunt, & vocantur Problemata; aliæ considerandum aliquid & contemplandum, quę Theoremata inscribuntur.

Nota.

Notarum in margine significatio.

Ax.11. significat axioma undecimum & sic de reliquis.

10 def.1. significat decimam definitionem libri primi.

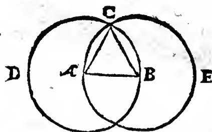
15 1. hoc est propositio decima quinta libri primi.

Const. hoc est ex constructione. hyp. ex hypothesi.

Propositiones

Propositio 1. Problema 1.

Super datâ rectâ linea terminata triangulum æquilaterum constituere.



Sit data recta A B. Centro igitur A, spatio A B describatur circulus BCD, & centro B spatio eodem ducatur circulus alter A C E priorem secans in puncto C, iunganturque certæ lineæ CA, CB, & factum est quod proponi-

ponitur. Nam latus AC cum sit semidiameter eiusdem circuli B C D cui lateri AB eidem *a* AB est æquale, & latus BC cum eodem AB est semidiameter circuli ACE, est ergo B C ipsi BA æquale. Cum ergo AC & BC eidem tertio AB sunt æqualia *b* paria quoque erunt inter se, ac proinde omnia latera trianguli ABC sunt æqualia.

a 15. def. 1.

b 1. ax.

Propos. 2. Problem. 2.

Ad datum punctum data recta linea æqualem rectam ponere.

H F D A E B G C

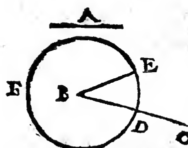
Vt ad datum punctū A ponatur recta æqualis ipsi B C, ducatur imprimis recta AB, & super ea fiat *a* triā. gulum æquilaterum A B D, lateribus DA, DB in directum productis. Inde centro B spatio BC fiat circulus CEF, & centro D spatio DC circulus CGH. erit-

a 1. 1.

eritque res peracta. Nam ad punctum A posita est recta AG æqualis ipsi B C; quandoquidem hæ duæ rectæ additis æqualibus BD & AD fiunt æquales semidiametri *b* circuli C G H. Sunt ergo rectæ AG & BC æquales. *b* 15. def. 1.

Propo. 3. Proble. 3.

Datis rectis lineis inæqualibus de maiore minori parem auferre.

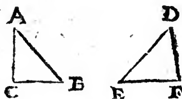


Vt rectę A ex maiore BC æqualis auferatur; ad punctum B ponatur BE *a* ipsi A æqualis. Mox centro B. spatio BE fiat circulus DEF, eritq; abscissa BD ipsi A æqualis; nam vtraque ipsi BE est æqualis, A quidem ex hypotesi, BD autem quia est eiusdem circuli semidiameter. *a* 2. 1.

Pro-

Proble. 4. Theorema 1.

Duorum triangulorum si latus vnum vni; & alterum alteri sit æquale, angulique inter illa latera contenti sint etiam pares; erunt & bases æquales, & ipsa tota triangula: sed & reliqui anguli reliquis angulis pares erunt quibus æqualia latera subtendantur.



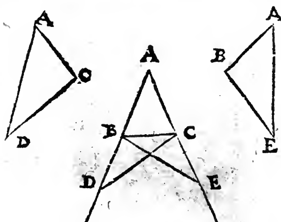
Vt si in triangulis A B C, D E F latus A B, lateri DE, & AC alteri DE, sit æquale (quod dicere solēt interpretes alterū alteri latus esse æquale, vel vtrumque vtrique) simulque etiam pares anguli A & D dictis lateribus contenti; Dico basim BC, basi EF esse æqualem, & cætera consequi vt est propositū. Nam si intelligamus triāgulum triangulo superponi ita vt angulus A congruat angulo D, congruent a latera A B, A C, lateribus D E, D F, alterum alteri, cui nempe est æquale. Sed congruent etiam bases, ideoque erunt

a 8. ax.

rũt æquales, cum enim puncta B & C, cadunt in E & F, recta B C, cadet in EF: alias puncta extrema B & C non obumbrarent *b* media, contra definitionẽ lineæ certæ. *b 4.def.1.*

Propo. 5. Theore. 2.

Trianguli Isoscelis anguli ad basim sunt pares; si æqualia latera producantur pares quoq; erunt anguli infra basim.



In triangulo isoscele A B C, latera AB, AC, producantur vt lubet, sumptaque recta AD, vtcunque, æqualis illi *a* capiatur AE, junganturq; rectæ, CD, BE. Nunc quia triangula ACD, ABE, (quæ claritatis causa extracta sunt ex *a 3.1.*

media

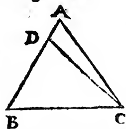
media figura,& ad latus posita) se habet iuxta prop. 4. est enim AG ipsi AB, æqualis ex suppositione & AD, ipsi AE ex constructione, angulusq; A lateribus
b 4. 1. illis cōtentus est comunis. Ob hæc b inquam bases DC,& BE, sunt pares, itēque angulus D angulo E, & angulus ACD angulo ABE. Rursus in mediâ figurâ triangula BCD,BCE, se habent iuxta prop.4. Sunt enim anguli D,& E, æquales & æqualibus lateribus contenti; erunt igitur anguli infra basim DBC, BCE, ęquales; itemque anguli BCD,EBC:& quia totus angulus ACD, ostensus est æqualis toti ABE, ablatis paribus CBE,& DCB, qui remanent supra basim sunt ęqnales. Trianguli igitur isoscelis &c.

Propo. 6. Theore. 3.

Si trianguli duo anguli fuerint æquales, erunt & latera angulis subtensa æqualia.

In triangulo ABC si ęquales sunt anguli B & C, erunt etiam latera AB, AC subtensa dictis angulis inter se æqualia. Nam

Nam si negas esse æqualia; sit alterum maius, puta AB; ex quo auferatur recta BD, ipsi AC æqualis, ducaturque recta DC. Nunc verò cum duo triangula ABC, CBD, habeant latus BC, commune, & altera latera BD, CA, sint æqualia, angulusque B, lateribus contentus, sit communis erit a triãgulum DB C, triãgulo A B C, hoc est totum parti, equale, quod fieri non potest, Si ergo trianguli &c. a 4. 1.



Cõuertit hęc propositio priorem partem superioris nam ibi ex qualitate laterum AB, & AC, colligebatur æqualitas angulorũ supra basim BC, hic veró, vice verso ex æqualitate dictorum angulorum colligitur æqualitas laterum. Solet autem Euclides eas tantum propositiones conuertere, cum ad probationem sequentium vtraque propositio est adhibenda, hoc est tam conuertens qnam conuersa.

Pro-

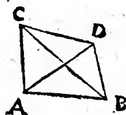
Propo. 7. Theore. 4

Super certa linea ductis ad quoduis punctum duabus rectis non ducentur super eadem ad aliud punctum versus easdem partes duæ aliæ, sic vt quæ ab eodem termino incipiunt, sint æquales.

Super recta AB, ductis ad punctum C, duabus rectis AC, BC, ducantur si fieri potest aliæ duę AD, DB, ad aliud punctum D, ita vt CA, ipsi DA, ęqualis sit, cum qua habet eundem terminũ A, & CD, ipsi DB, ducaturque insuper recta CD: quia igitur AC, AD, sunt ęquales, erunt *a* anguli ACD, ADC, inter se ęquales; maior erit proinde angulus ADC, angulo BCD, & multo maior angulus CDB; nũc verò quia CB, ponitur æqualis ipsi DB, erit angulus *b* CDB angulo BCD, æqualis, qui tamen ante erat ostẽsus multo maior, non ergo ductę sunt binę æquales prioribus. Quod fuit demon-

a 5. 1.

b 5. 1.

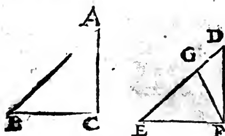


monſtrandum.

Poſſet alibi conſtitui punctum D ad quod ducuntur lineæ poſteriores vt intra triangulum ABC, vel in alterutro eius latere; ſed eadem demonſtratione facile probabitur lineas poſteriores numquam poſſe eſſe ęquales prioribus.

Propo. 8. Theore. 5.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, & baſim baſi æqualem; habebunt etiam angulum lateribus contentum æqualem.

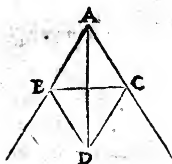


In triangulis ABC, DEF, ſint latera AB, AC, ipſis DE, DF, ęqualia, itemque baſis BC, baſi EF. Quod ſi negas angulos A & D, lateribus contentos pares eſſe, intelligatur triangulum ABC triãgulo DEF, ſuperponi, tunc verò neceſ-

ſariò punctum A, cadet in D, & ſic angulus angulo congruet vt vult propoſitio: nam ſi non caderet in D, ſed in G, aut aliud punctum, tunc duæ rectæ duabus rectis æquales ducerentur ad aliud punctum, &c. quod eſt contra precedentem. *Eſt conuertens primæ partis propoſ. 4.*

Propo. 9. Proble. 4.

Datum angulum rectilineum ſecare bifariam.



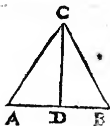
Sumatur recta AB, vt lubet, & ipſi par AC, ex lateribus dati anguli BAC, nec non ſuper ductam rectam BC, fiat triangulum æquilaterum BDC, ducatorque recta AD, per quam angulus BAC, diuidetur bifariam: nam AB, AC, æquales ſunt ex conſtructione, & AD communis, eſtque inſuper baſis BD, baſi CD, æqualis, ſunt *a* ergo anguli BAD, CAD,

a 8. 1.

AD, æquales; quare angulus BAC, diuisus eſt bifariam. Quod erat faciendum.

Propo. 10. Proble. 5.

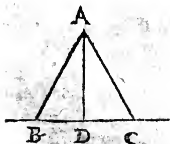
Datam rectam finitam ſecare bifariam.



Super recta AB, fiat triãgulum ęquilaterum; cuius angulus ACB, diuidatur bifariam per rectam CD, & recta AB, in puncto D bifariam quoque ſecta erit: Nam triangula CAD, CBD, ſe habent iuxta 4. propo. Ergo baſes AD, DB, ſunt æquales.

Propo. 11. Proble. 6.

Ex dato puncto in linea recta perpendicularem excitare.



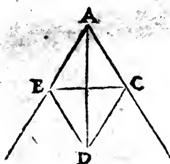
In recta BC, detur punctum D, ſumptâque pro arbitrio DB, ſumatur æqualis DC, inde ſuper BC ſtructo triangulo æ-

C 2 quila-

sariò punctum A, cadet in D, & sic angulus angulo congruet vt vult propositio: nam si non caderet in D, sed in G, aut aliud punctum, tunc duæ rectæ duabus rectis æquales ducerentur ad aliud punctum, &c. quod est contra precedentem. *Est conuertens primæ partis propos. 4.*

Propo. 9. Proble. 4.

Datum angulum rectilineum secare bifariam.



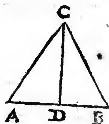
Sumatur recta AB, vt lubet, & ipsi par AC, ex lateribus dati anguli BAC, nec non super ductam rectam BC, fiat triangulum æquilaterum BDC, ducaturque recta AD, per quam angulus BAC, diuidetur bifariam: nam AB, AC, æquales sunt ex constructione, & AD communis, estque insuper basis BD, basi CD, æqualis, sunt *a* ergo anguli BAD, CAD,

a 8. 1.

AD, æquales; quare angulus BAC, diuisus est bifariam. Quod erat faciendum.

Propo. 10. Proble. 5.

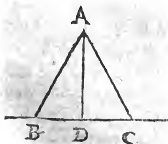
Datam rectam finitam secare bifariam.



Super recta AB, fiat triãgulum ęquilaterum, cuius angulus ACB, diuidatur bifariam per rectam CD, & recta AB, in puncto D bifariam quoque secta erit: Nam triangula CAD, CBD, se habent iuxta 4. propo. Ergo bases AD, DB, sunt æquales.

Propo. 11. Proble. 6.

Ex dato puncto in linea recta perpendicularem excitare.



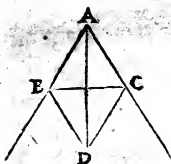
In recta BC, detur punctum D, sumptâque pro arbitrio DB, sumatur æqualis DC, inde super BC structo triangulo æ-

C 2 quila-

sariò punctum A, cadet in D, & sic angulus angulo congruet vt vult propositio: nam si non caderet in D, sed in G, aut aliud punctum, tunc duæ rectæ duabus rectis æquales ducerentur ad aliud punctum, &c. quod est contra precedentem. *Est conuertens primæ partis propos. 4.*

Propo. 9. Proble. 4.

Datum angulum rectilineum secare bifariam.



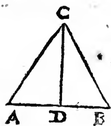
Sumatur recta AB, vt lubet, & ipsi par AC, ex lateribus dati anguli BAC, nec non super ductam rectam BC, fiat triangulum æquilaterum BDC, ducatúrque recta AD, per quam angulus BAC, diuidetur bifariam: nam AB, AC, æquales sunt ex constructione, & AD communis, estque insuper basis BD, basi C

a 8. 1. D, æqualis, sunt a ergo anguli BAD, CAD,

AD, æquales; quare angulus BAC, diuisus est bifariam. Quod erat faciendum.

Propo. 10. Proble. 5.

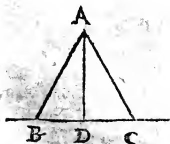
Datam rectam finitam secare bifariam.



Super recta AB, fiat triãgulum æquilaterum, cuius angulus ACB, diuidatur bifariam per rectam CD, & recta AB, in puncto D bifariam quoque secta erit: Nam triangula CAD, CBD, se habent iuxta 4. propo. Ergo bases AD, DB, sunt æquales.

Propo. 11. Proble. 6.

Ex dato puncto in linea recta perpendicularem excitare.



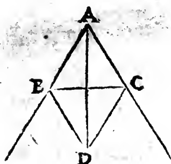
In recta BC, detur punctum D, sumptâque pro arbitrio DB, sumatur æqualis DC, inde super BC structo triangulo æ-

C 2 quila-

sariò punctum A, cadet in D, & sic angulus angulo congruet vt vult propositio: nam si non caderet in D, sed in G, aut aliud punctum, tunc duæ rectæ duabus rectis æquales ducerentur ad aliud punctum, &c. quod est contra precedentem. *Est conuertens primæ partis propos. 4.*

Propo. 9. Proble. 4.

Datum angulum rectilineum secare bifariam.



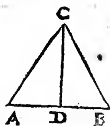
Sumatur recta AB, vt lubet, & ipsi par AC, ex lateribus dati anguli BAC, nec non super ductam rectam BC, fiat triangulum æquilaterum BDC, ducatorque recta AD, per quam angulus BAC, diuidetur bifariam: nam AB, AC, æquales sunt ex constructione, & AD communis, estque insuper basis BD, basi CD, æqualis, sunt *a* ergo anguli BAD, CAD,

a 8. 1.

AD, æquales; quare angulus BAC, diuisus est bifariam. Quod erat faciendum.

Propo. 10. Proble. 5.

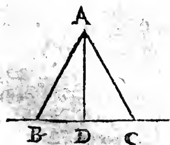
Datam rectam finitam secare bifariam.



Super recta AB, fiat triãgulum æquilaterum, cuius angulus ACB, diuidatur bifariam per rectam CD, & recta AB, in puncto D bifariam quoque secta erit: Nam triangula CA D, CBD, se habent iuxta 4. propo. Ergo bases AD, DB, sunt æquales.

Propo. 11. Proble. 6.

Ex dato puncto in linea recta perpendicularem excitare.



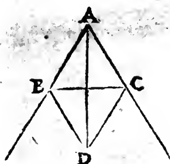
In recta B C, detur punctum D, sumptâque pro arbitrio D B, sumatur æqualis DC, inde super B C structo triangulo æ-

C 2 quila-

fariò punctum A, cadet in D, & sic angulus angulo congruet vt vult propositio: nam si non caderet in D, sed in G, aut aliud punctum, tunc duæ rectæ duabus rectis æquales ducerentur ad aliud punctum, &c. quod est contra precedentem. *Est conuertens primæ partis propos. 4.*

Propo. 9. Proble. 4.

Datum angulum rectilineum secare bifariam.



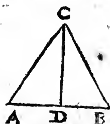
Sumatur recta AB, vt lubet, & ipsi par AC, ex lateribus dati anguli BAC, nec non super ductam rectam BC, fiat triangulum æquilaterum BDC, ducatorque recta AD, per quam angulus BAC, diuidetur bifariam: nam AB, AC, æquales sunt ex constructione, & AD communis, estque insuper basis BD, basi CD, æqualis, sunt *a* ergo anguli BAD, CAD,

a 8. 1.

AD, æquales; quare angulus BAC, diuisus est bifariam. Quod erat faciendum.

Propo. 10. Proble. 5.

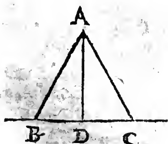
Datam rectam finitam secare bifariam.



Super recta AB, fiat triãgulum ęquilaterum, cuius angulus ACB, diuidatur bifariam per rectam CD, & recta AB, in puncto D bifariam quoque secta erit: Nam triangula CAD, CBD, se habent iuxta 4. propo. Ergo bases AD, DB, sunt æquales.

Propo. 11. Proble. 6.

Ex dato puncto in linea recta perpendicularem excitare.



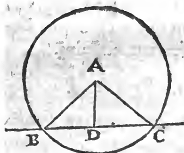
In recta BC, detur punctum D, sumptâque pro arbitrio DB, sumatur æqualis DC, inde super BC structo triangulo æ-

quilater BCA; ex A, ducatur recta AD, & hæc erit ad angulos rectos ipsi BC; Nã latus DB, æquale est ipsi DC, ex cõstructione, & latus DA, cõmune basis insuper, BA, basi CA, ęqualis; sũt *a* ergo anguli ADB, ADC, æquales, ac proinde recti & psa AD, *b* perpendicularis.

a 8. 1.
b. 10. def. 1.

Propo. 12. Proble. 7.

A dato extra rectam puncto perpendicularem ducere ad eandem rectam.

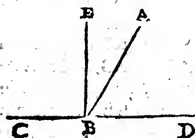


Detur punctum A, quo centro, spatio quocunq; ducatur circulus dummodo secet rectam BC, & super partem abscissam B C, facto triangulo ABC, eadem B C, diuidatur bifariam, ducaturque recta A D; & hæc eadem erit perpendicularis, ducta ex A, ad rectam BC. Nam quia in triangulis ABD, ADC, æquales sunt AB, AC, eiusdem circuli semidiametri æquales item BD, DC, ex constructione & AD comunis, angu-

anguli ADB, *a* ADC, erunt æquales ac proinde recti, ideoque recta AD, perpendicularis. *ax. 1. 1.*

Propositio 13. Theore. 6.

Recta super rectam consistens aut duos rectos aut duobus rectis æquales angulos facit.

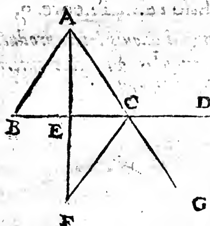


Nam recta AB, consistens super CD, aut facit vtrimque æquales angulos, & proinde rectos; aut inæquales, & tunc ex puncto B, excitetur perpẽdicularis BE, quia igitur in angulo ABC, continebatur vnus rectus EBC, & insuper angulus EBA, qui cũ angulo ABD, facit alterũ rectum, & recta AB, constituebat angulos ABC, ABD, æquales duobus rectis.



ior interno & opposito CBA, vel BAC; latus enim AC, bisecetur in E, ducaturque BF, ita vt EF æqualis fiat ipsi BE, iungaturq; recta FC, quæ erit æqualis ipsi AB: nam a duo latera EB, EA, æqualia sunt duobus EF, EC, & anguli contenti çquales ad verticem; Triangula ergo AEB, FEC, se habent iuxta 4. propo. & basis FC, basi AB est çqualis, angulus item BAE, angulo ECF; sed hic est pars anguli externi ECD, ideoque minor, quare & angulus BAC, minor est externo ACD.

a 4. 1.



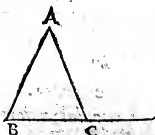
Quod si latus BC, bisecetur in E producto latere AC; in G, & reliqua fiāt vt prius eodē modo monstrabitur angulum BCG, & proinde angulum ACD, qui est huic ad verticem, maiorem esse angulo ABC.

Om-

Omnis igitur &c.

Propositio 17. Theore. 10.

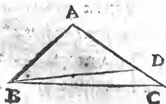
Omnis triãguli duo anguli quomodocũq; sumpti minores sunt duobus rectis.



Nam angulus C, internus plus requirit quam angulum B, vt fiat ęqualis duobus rectis; requirit enim angulum C, externum maiorem interno *a* & opposito B; non sunt ergo anguli B, & C, internis pares duobus rectis. Similiter alio latere producto de alijs quibusuis duobus angulis idem probabitur. Omnis ergo &c, a.16. 1.

Propositio 18. Theore. 11.

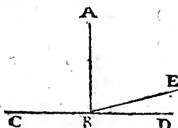
Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



Vt si triãguli ABC, maius est latus AC, quam AB, maior erit angulus

Propoſitio 14. Proble. 7.

Si ad punctum in recta linea datum duæ rectæ non ad eaſdem partes ductæ angulos efficiant duobus rectis æquales, in directum ſunt illæ lineæ.



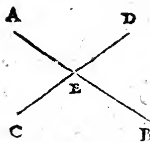
Nam ſi ad pũctum B, ducantur duæ rectæ CB, BD, facientes cum recta AB, angulos æquales duobus rectis, & negas iacere in directum, iaceat ergo BE, in directum ipſi CB. At hoc eſſe non poteſt; nam anguli ABC, ABD, erant pares duobus rectis: non ſunt ergo pares duobus rectis anguli ABC, & ABE, alias totum parte non eſſet maius; ſed neque alia duci poteſt ipſi CB, adiacens in directũ niſi BD; ergo &c.

Propoſitio 15. Theore. 8.

Si duæ rectæ ſe inuicem ſecuerint angulos ad verticem oppoſitos æquales facient.

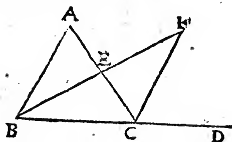
Rectæ AB, CD, ſecent ſe in E, eritq; angu-

angulus CEB, angulo AED (qui dicitur illi esse ad verticem oppositus) æqualis: nam siue AED siue CEB adiiciatur angulo interiecto AEC, cõstituet æquales duobus rectis; quare anguli CEB,& AED, sunt æquales,cum addito eodem, fiant æquales. Similis demonstratio procedet in reliquis oppositis angulis ad verticem.



Propositio 16. Theore. 9.

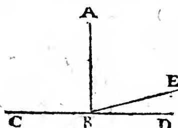
Omnis trianguli quouis latere producto externus angulus vtrolibet interno & opposito maior est.



Trianguli ABC,latere BC,producto in D,erit angulus ACD externus ma-

Propositio 14. Proble. 7.

Si ad punctum in recta linea datum duæ rectæ non ad easdem partes ductæ angulos efficiant duobus rectis æquales, in directum sunt illæ lineæ.



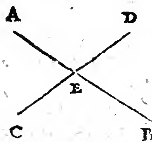
Nam si ad pũctum B, ducantur duæ rectæ CB, BD, facientes cum recta AB, angulos æquales duobus rectis, & negas iacere in directum, iaceat ergo BE, in directum ipsi CB. At hoc esse non potest; nam anguli ABC, ABD, erant pares duobus rectis: non sunt ergo pares duobus rectis anguli ABC, & ABE, alias totum parte non esset maius; sed neque alia duci potest ipsi CB, adiacens in directũ nisi BD; ergo &c,

Propositio 15. Theore. 8.

Si duæ rectæ se inuicem secuerint angulos ad verticem oppositos æquales facient.

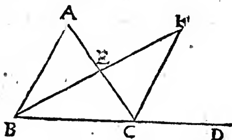
Rectæ AB, CD, secent se in E, eritq; angu-

angulus CEB, angulo AED (qui dicitur illi esse ad verticem oppositus) æqualis: nam siue AED siue CEB adiiciatur angulo interiecto AEC, cõstituet æquales duobus rectis; quare anguli CEB, & AED, sunt ęquales, cum addito eodem, fiant æquales. Similis demonstratio procedet in reliquis oppositis angulis ad verticem.



Propositio 16. Theore. 9.

Omnis trianguli quouis latere producto externus angulus vtrolibet interno & opposito maior est.

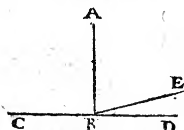


Trianguli ABC, latere BC, producto in D, erit angulus ACD externus ma-

 ior

Propositio 14. Proble. 7.

Si ad punctum in recta linea datum duæ rectæ non ad easdem partes ductæ angulos efficiant duobus rectis æquales, in directum sunt illæ lineæ.



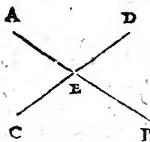
Nam si ad pũctum B, ducantur duæ rectæ CB, BD, facientes cum recta AB, angulos æquales duobus rectis, & negas iacere in directum, iaceat ergo BE, in directum ipsi CB. At hoc esse non potest; nam anguli ABC, ABD, erant pares duobus rectis: non sunt ergo pares duobus rectis anguli ABC, & ABE, alias totum parte non esset maius; sed neque alia duci potest ipsi CB, adiacens in directũ nisi BD; ergo &c,

Propositio 15. Theore. 8.

Si duæ rectæ se inuicem secuerint angulos ad verticem oppositos æquales facient.

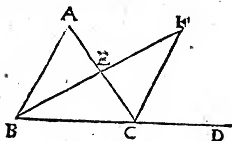
Rectæ AB, CD, secent se in E, eritq; angu-

angulus CEB, angulo AED (qui dicitur illi esse ad verticem oppositus) æqualis: nam siue AED siue CEB adiiciatur angulo interiecto AEC, cõstituet æquales duobus rectis; quare anguli CEB, & AED, sunt ęquales, cum addito eodem, fiant æquales. Similis demonstratio procedet in reliquis oppositis angulis ad verticem.



Propositio 16. Theore. 9.

Omnis trianguli quouis latere producto externus angulus vtrolibet interno & opposito maior est.

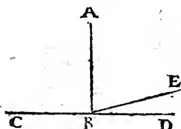


Trianguli ABC, latere BC, producto in D, erit angulus ACD externus maior

 ior

Propositio 14. Proble. 7.

Si ad punctum in recta linea datum duæ rectæ non ad easdem partes ductæ angulos efficiant duobus rectis æquales, in directum sunt illæ lineæ,



Nam si ad pũctum B, ducantur duæ rectæ CB, BD, facientes cum recta AB, angulos æquales duobus rectis, & negas iacere in directum, iaceat ergo B E, in directum ipsi C B. At hoc esse non potest; nam anguli ABC, ABD, erant pares duobus rectis: non sunt ergo pares duobus rectis anguli ABC, & ABE, alias totum parte non esset maius; sed neque alia duci potest ipsi CB, adiacens in directũ nisi BD; ergo &c,

Propositio 15. Theore. 8.

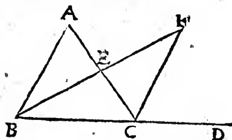
Si duæ rectæ se inuicem secuerint angulos ad verticem oppositos æquales facient.

Rectæ AB, CD, secent se in E, eritq; angu-

angulus CEB, angulo AED (qui dicitur illi eſſe ad verticem oppoſitus) æqualis: nam ſiue AED ſiue CEB adiiciatur angulo interiecto AEC, cõſtituet æquales duobus rectis; quare anguli CEB,& AED, ſunt equales, cum addito eodem, fiant æquales. Similis demonſtratio procedet in reliquis oppoſitis angulis ad verticem.

Propoſitio 16. Theore. 9.

Omnis trianguli quouis latere producto externus angulus vtrolibet interno & oppoſito maior eſt.

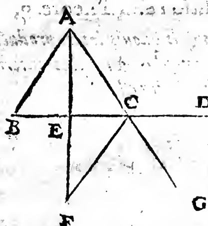


Trianguli ABC, latere BC, producto in D, erit angulus ACD externus ma-

 ior

ior interno & opposito CBA, vel BAC; latus enim AC, bisecetur in E, ducaturque BF, ita vt EF æqualis fiat ipsi BE, iungaturq; recta FC, quæ erit æqualis ipsi AB: nam a duo latera EB, EA, æqualia sunt duobus EF, EC, & anguli contenti ęquales ad verticem; Triangula ergo AEB, FEC, se habent iuxta 4. propo. & basis FC, basi AB est ęqualis, angulus item BAE, angulo ECF; sed hic est pars anguli externi ECD, ideoque minor, quare & angulus BAC, minor est externo ACD.

a 4. I.



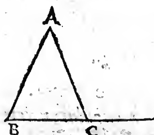
Quod si latus BC, bisecetur in E producto latere AC; in G, & reliqua fiāt vt prius eodē modo monstrabitur angulum BCG, & proinde angulum ACD, qui est huic ad verticem, maiorem esse angulo ABC.

Om-

Omnis igitur &c.

Propositio 17. Theore. 10.

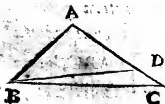
Omnis triãguli duo anguli quomodocũq; sumpti minores sunt duobus rectis.



Nam angulus C, internus plus requirit quam angulum B, vt fiat ęqualis duobus rectis; requirit enim angulum C, externum maiorem interno *a* & opposito B; non sunt ergo anguli B, & C, internis pares duobus rectis. Similiter alio latere producto de alijs quibusuis duobus angulis idem probabitur. Omnis ergo &c. *a.16. 1.*

Propositio 18. Theore. 11.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

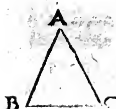


Vt si triãguli ABC, maius est latus AC, quam AB, maior erit angulus

lus ABC, quam angulus C, subtensus à latere minore AB: Sumatur enim AD, æqualis ipsi AB: Tunc verò quia æqualia sunt latera AB, AD, anguli ABD,
b 5. 1. ADB, supra a basim sunt pares. Sed angulus ADB, est externus & oppositus
b 16. 1. angulo C, ac proinde b maior; multo ergo maior est, totus angulus ABC, angulo C, Omnis igitur triangul. &c.

Propositio 19. Theore. 12.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri opponitur.



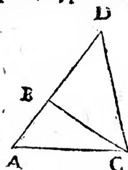
Si angulus B, maior sit ipso C, erit & AC, maior quam AB, non enim est minor aut æqualis, nam tunc angulus B, esset mi-
a 8. 1. nor a aut æqualis b ipsi C, est ergo AC,
b 5. 1. maior quam AB, Quare omnis trianguli &c:

Propo. 20. Theore. 13.

Omnis trianguli duo latera quomodocunque sumpta, reliquo sunt maiora.

Si enim in triangulo ABC, latera AB, BC, simul sumpta non sunt maiora ipso

ipso AC, producatur AB, sic vt BD, æqualis sit ipsi BC, & proinde AD, æqualis sit ipsis AB, & BC; Nunc vero quia BD, & BC, sunt æqualia; erũt pares *a* anguli D, & a 5. 1.



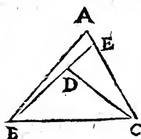
BCD; maior ergo vtroq; erit totus angulus ACD; sed totum hunc angulum trianguli ADC, subtendit latus AD, maior ergo est *b* recta AD (quę æqualis b 19. 1.
est duabus AB, & BC,) quam latus AC, Omnis ergo trianguli &c.

Propo. 21. Theore. 14.

Si à terminis vnius lateris in triangulo duæ rectæ intra triangulum iungantur; erunt hæ lateribus trianguli minores; maiorem verò angulum continebunt.

Vt in triangulo ABC, dico latera BA, AC, esse maiora rectis BD, & DC, quæ intra triangulum iunguntur in D. Nam producto latere BD, in E, latera BA, AE, trianguli BAE, maiora *a* sunt a 20. 1.
ipso

ipso BE; Addito ergo comuni EC, maiora sunt BA, AC, ipsis BE, EC. Et quia in triangulo CDE maiora sunt CD, ED, b ipso CE, addito comuni DB, maiora fient CE, EB, quam CD, DB; Sed CA, AB, maiora ostensa sunt quam BE, EC; erunt ergo AB, AC, multo maiora ipsis BD, DC; Secundo angulus BDC, externus c maior est interno & opposito DEC, & hic maior ipso A interno & opposito; multo ergo maior est angulus BDC, ipso angulo A.



b 20. I.

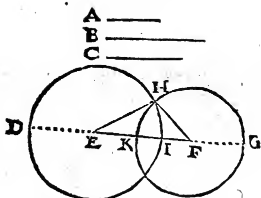
c 16. I.

Propositio 22. Proble. 8.

Triangulum constituere cuius latera tribus datis lineis sint æqualia; oportet autem duas quomodocunque sumptas reliqua esse maiores.

Dentur tres rectæ A, B, C, & ipsis sumantur ordine æquales DE, EF, FG: tum cẽtro E, spatio ED, ducatur circulus DG, & cẽtro F interuallo FG, ducatur circulus alter GH, iungãturq; rectæ

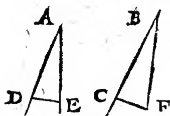
EH,



EH, FH, & factũ est quod proponitur. Nã in triãgulo EHF, recta EH, æqualis *a* est ipsi DE, hoc est ipsi A, EF, verò ipsi B, ac deniq; FH, ipsi FG, hoc est ipsi C. *a 15. def 1.*

Propositio 23. Proble. 9.

Ad datum in recta punctum dato angulo, æqualem angulum rectilineum ponere.

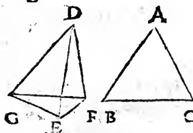


Detur angulus A, cui ad pũctum B, in recta BC, æqualis sit ponendus. Sumptis vtcunque in lateribus dati anguli punctis D, & E, iungatur recta DE, constituaturque triangulum BCF, cuius latera

tera sint tribus lateribus ipsius ADE, æqualia, ita vt BC par sit ipsi AD; BF, ipsi AE; CF, ipsi DE: Quo facto triangula se habent iuxta 8. propo. Nam latera & bases sunt æqualia; quare anguli A, & B, æquales, & sic factum est quod erat propositum.

Propositio 24. Theore. 15.

Si duo triangula duo latera æqualia alterum alteri habuerint, & vnum triangulum habeat angulum lateribus contentum maiorem, idem quoque habebit basim, basi alterius trianguli maiorem.



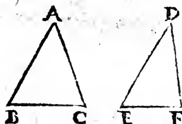
Vt si latera AB, AC, æqualia sint lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, maior quoque erit basis BC, basi EF. Nam si fiat angulus GDF, ipsi A æqualis, & latus DG, ipsi DE, sit æquale, iungāturq; rectę GE, GF, anguli *a* DGE, DEG, pares erunt; quare totus FEG, maior erit quam DGE, & mul-

a 5. 1.

multo maior quam FGE, quare recta *b* GF, & huic æqualis BC, maior est quam EF. Si duo ergo triangula &c. *b* 19. 1.

Propositio 25. Theore. 16.

Si duo triangula duobus lateribus duo latera æqualia habuerint alterum alteri, basim verò basi maiorem, habebunt angulum contentum lateribus angulo maiorem.

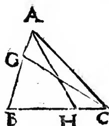


Nam si paria sint latera AB, AC, ipsis DE, DF, & basis BC, maior basi EF, angulus A *a* maior erit ipso D. si enim aut æqualis esset, aut minor, basis etiam EF, ipsi BC, æqualis esset, aut minor cōtra hypothesim. Si ergo &c. *a* 24. 1.

Propositio 26. Theore. 17.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis pares habuerint alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod adiacet angulis, siue quod vni

vni æqualium angulorum subtenditur, erunt & reliqua latera alterum alteri æqualia, & reliquus angulus reliquo æqualis.





Sint in triangulis ABC, DEF, anguli B & ACB, ęquales angulis E & F, sitq; primo latus BC, quod adiacet angulis æqualibus æquale lateri EF: iam si latus BA, non est æquale ipsi ED, sit illo maius, & ex eo sumatur BG, æqualis ipsi ED, tum vero, ducta CG, duo latera triangulorũ BGC, & EDF, æqualia sunt, & anguli contenti B & E, ęquales vnde *a* anguli F, & GCB, pares erunt; quod esse non potest; nam hic angulus est pars ipsius ACB, qui æqualis ponebatur ipsi F, non est ergo maior BA, quam ED; sed neque minor, alias lateri ED eadem quæ prius applicaretur demonstratio; ergo æqualis; & tunc triãgula BAC, EDF, se habẽt iuxta 4. prop. & latera lateribus, anguli item

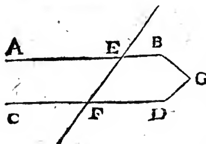
a 4. 1.

angu-

angulis correſpõdẽtibus ſunt æquales. Sit ſecundo poſitis angulis B, & ACB, ipſis E, & F ęqualibus, latus ED quod ſubtenditur angulo F, æquale lateri BA; iam ſi BC non eſt æqualis ipſi EF, ſit maior, ſumaturque BH æqualis ipſi EF, ductâque AH, probabitur triangula BAH, & EDF, eſſe iuxta 4. propo. Quare angulum BHA, parem eſſe ipſi F, cui eidem ęqualis eſt ACB; quod fieri nequit: nam ſic angulus AHB, ęqualis eſſet interno & oppoſito ACH; non eſt ergo BC, maior quàm EF, ſed æqualis; quare rurſus triangula BAC, EDF, ſunt iuxta 4. propo. & cętera ſequuntur vt prius.

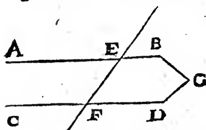
Propoſitio 27. Theore. 18.

Si in duas rectas recta incidens angulos alternos pares fecerit, parallelæ erunt illæ lineæ.



Sint duæ rectæ A B, CD, in quas cadat recta EF, faciens angulos al-

ternos AEF, EFD, ęquales; parallelæ ergo erunt rectę AB, CD; nam si concurrerent in G, & fieret triangnlum EGF, esset angulus externus AEF

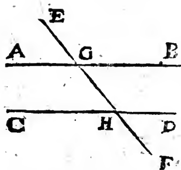


a 16. 1. maior a interno & opposito EFG, cui ponebatur æqualis. Eadem fiet demonstratio si dicantur concursurę versus A; neutram ergo in partem concurrent, sed sunt parallelæ.

Propositio 28. Theore. 19.

Si in duas rectas recta incidens angulum externum interno & opposito ad easdem partes æqualem fecerit, aut duos internos ad easdem partes æquales duobus rectis, parallelæ sūt illæ lineæ.

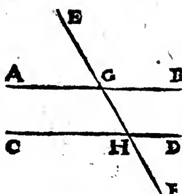
In duas rectas AB, CD, incidens EF, faciat primò angulum externum EGB, æqualem interno GHD, & opposito ad easdem partes; quia ergo angulus EGB, ęqualis est angulo a ad verticem AGH, a 15. 1. erunt anguli alterni AGH, GHD, æquales



quales; cum æquales sint vni tertio EGB: ergo lineæ AB, CD, sunt parallelæ. Faciat secundo recta EF, angulos BGH, DHG, internos ad easdem partes æquales duobus rectis; quia ergo angulus EGB, cum angulo BGH, facit æquales duobus rectis & cum eodem BGH, angulus GHD, facit itidem duobus rectis æquales, sequitur angulum externum EGB, æqualẽ esse interno GHD: quare per priorem partem huius propo. rectæ AB, CD, sunt parallelæ.

Propos. 29. Theore. 20.

Si recta in parallelas incidat anguli interni ad easdem partes duobus rectis æquales erunt, anguli item alterni inter se æquales; ac denique angulus externus interno & opposito erit æqualis.



Vt si in parallelas AB, CD, cadat recta EF, primo anguli interni tã versus A, quã versus B, pares erũt duobus rectis: nam si versus alterutram partem essent minores, lineę ex ea parte [a] productę cõcurrerẽt, quare contra hypothesim non essent parallelæ.

[a] ax. 11.

Secundo quia angulus DHG, tam cum angulo HGB, quam cum ángulo CHG, valet duos rectos, sequitur angulos HGB, & CHG, qui sunt alterni, inter se esse æquales.

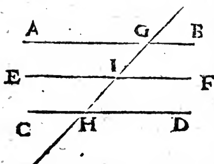
Tertio eadem ratione quia BGH, siue cum externo EGB, siue cum interno GHD, valet duos rectos, sequitur externum EGB, parẽ esse interno GHD. Si ergo recta &c.



Pro-

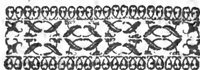
Propo. 30. Theor. 21.

Quæ eidem rectæ sunt parallelæ, & inter se sunt parallelæ.



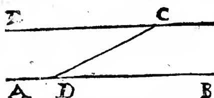
Sint rectæ A B CD, parallelæ ipsi E F, in quas omnes cadat recta GH. Quia ergo AB, EF sunt parallelæ, anguli alterni AGI, GIF sunt [a] æquales: Sed angulus GIF, æqualis est [b] interno & opposito IHD (cum EF, CD, ponantur parallelæ) sunt ergo inter se æquales anguli AGH, GHD, cum sint pares eidem tertio GIF; sed ijdem anguli sunt alterni circa lineam GH, sunt ergo lineę AB CD, [c] in quas incidit, parallelæ.

a 29. 1.
b 29. 1.
c 27. 1.



Propositio 31. Proble. 10.

Ex dato puncto datæ rectæ parallelam ducere.



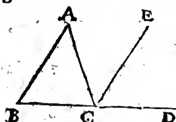
Detur recta AB, cui ex puncto C, ducenda sit parallela: sumpto in recta AB, puncto quouis, puta D, ducatur vtcũq; recta DC, & angulo CDB, constituatur
a 23. 1. a æqualis ECD, eritque recta EC, b ipsi
b 27. 1. AB parallela; nam anguli alterni ECD CDB, sunt pares.

Propositio 32. Theore. 22.

Omnis trianguli vno latere producto externus angulus duobus internis & oppositis est æqualis, & tres interni duobus rectis sunt æquales.

Trianguli ABC producatur latus quodcunque, puta BC, in D, ducaturq;
a 31. 1. a CE ipsi AB parallela. Quia ergo AC
b 29. 1. cadit in parellelas AB EC, angulus b A æqualis est alterno ACE. Rursus quia recta BC, cadit in easdem parallelas; angu-

angulus c ECD, externus æqualis est interno B. Totus igitur ACD æqualis est duobus internis A, & B, & probata est prior pars propositionis. Nunc quia angulus ACB cũ externo ACD valet duos c 29. 1.



rectos, idẽ AC B, cum duobus A & B, valebit duos rectos, cũ A & B ostensi sint pares ipsi externo ACD. Omnis igitur trianguli &c.

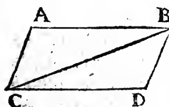
Corrollarium.

Hinc manifestum est in omni quadrilatero quatuor simul angulos quatuor rectis esse æquales: nam ducta recta ex vno angulo in oppositum, quadrilaterum diuidetur in duo triangula quæ singula habent angulos pares duobus rectis, anguli ergo totius quadrilateri valent quatuor rectos. vt apparet in figura seq. propo.



Propo. 33. Theore. 23.

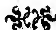
Lineæ rectæ quæ æquales & parallelas ad easdem partes iungunt, sunt & ipsæ æquales & parallelæ.



Rectas A B, CD æquales & parallelas iungãt ad easdem partes duæ aliç AC, BD ducaturque recta BC. Quia ergo recta BC tangit parallelas AB, CD; anguli [a] alterni ABC, BCD pares sunt. Nunc vero quia latera AB, CD sunt æqualia, & latus CB est commune, anguliq; cõtenti ABC BCD sũt æquales, triangula ABC, BCD sunt iuxta 4. Quare basis AC, basi BD, est æqualis: (quæ est prior pars propositionis) & insuper angulus CBD, angulo BCA erit æqualis. Nunc ergo quia in duas rectas AC, BD cadens recta BC facit angulos CBD, BCA alternos æquales, parallelę [b] sunt AC, BD.

a 29. 1.

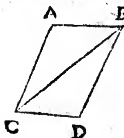
b 27. 1.



Pro-

Propoſ. 34. Theore. 24.

Parallelogrammorum ſpatiorum oppoſita latera & anguli ſunt æqualia; ipſaque parallalogramma à diametro ſecantur biſariam.



Nam in parallelogrãmo AD ducta diametro BC, anguli alterni a ABC, BCD sũt pares, & rurſus æquales ſunt anguli CBD BCA; quia ergo triangula ABC, BCD habent duos angulos pares, & latus BC adiacens angulis cõmune, reliqui b anguli A & D ſunt pares, & latera omnia, & anguli correſpõdentes ſunt æquales: tota denique triãgula æqualia ſunt. Quare parallelogrammum AD biſariam ſecatur à diametro B C. Igitur parallelogram. &c.

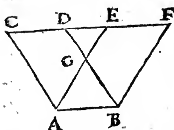
a 29. 1.

b. 26. 1.

Propo. 35. Theore. 25.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

Super



Super eadem basi AB, constituta sint duo parallelogramma AD, AF; sintque AB, CF lineæ parallelæ. Considerentur deinde duo triangula CAE, DBE in quibus latus AC ęquale est a ipsi DB, & CE alteri DF: nam CD, EF, æqualia b sunt vni & eidem AB, & addito communi DE lineę CE, DF sunt pares. Sed & angulus BDF æqualis est ipsi C, cū in rectas CA, DB cadat CF: sunt ergo triangula CAE, DBF iuxta 4, & vndique æqualia. Quare ablato cōmuni triangulo DEG trapezia relicta CD GA, FEGB sunt æqualia; & addito communi triangulo ABG, tota parallelogrāma sunt paria.

a 34. 1.
b 34. 1.
c 29. 1.

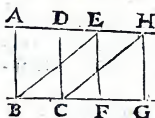
Propo. 36. Theore. 26.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

Satis patet ex præc: nā idē facit ęqualis basis, & eadē. Sint nihilominus paral-

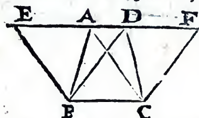
rallelogrāma AC, EG inter parallelas AH, BG super basibus paribus BC, FG, iūgāturq; rectæ BE, CH: quę quia iūgūt ęquales & parallelas BC, EH, sūt & ipsę *a* æqnales, & parallelæ: estque EBCH parallelogrammum *b* æquale vtrique tam ipsi AC cum sit super eadem basi BC, quā alteri EG, cum sit etiam super eadem basi EH. Sunt ergo & extrema parallelogramma AC, EG æqualia.

a 34. 1.
b 35. 1.



Propositio 37. Theore. 27.

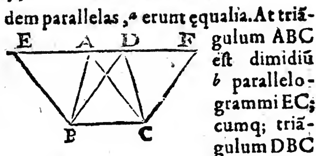
Triangula super eadem basi & inter parallelas easdē posita, sunt æqualia.



Sint triāgula, ABC DBC, super eadem basi BC inter parallelas BC, EF, ducanturque rectę EB parallela ipsi AC, & FC ipsi DB parallela. Quia ergo parallelogrā ma EC, BF sunt super eadem basi, & inter eas-

dem

a 35. 1. dem parallelas, [a] erunt ęqualia. At triã-

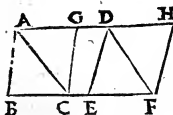


gulum ABC eſt dimidiũ

b 34. 1. [b] parallelogrammi EC; cumq; triã-gulum DBC alterius parallelogrammi BF ſit etiam dimidium, erunt triangula ABC, DBC inter ſe ęqualia, quod erat demonſtrandum.

Propoſitio 38. Theore. 28.

Triangula ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis ſunt æqualia.

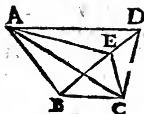


Patet ex proxime antecedenti. Triã-gula enim ſuperioris propoſitionis ponantur ſuper æqualibus baſibus vt ſint ABC, DEF, ducãturque vtrique lateri parallelæ, & demonſtratio procedet vt prius.

Propo.

Propoſitio 39. Theore. 29.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.



Nam ſi triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC conſtituta, ſint æqualia, & negas tamen rectam ex A per D ductam ipſi BC eſſe parallelam; ducatur alia quæ ſit parallela puta AE; iūctâ ergo rectâ CE, erit triãgulum ABC, æquale a triangulo EBC, quod fieri non poteſt: nam triangulum DBC æquale ponitur eidem triangulo ABC; ergo EBC quod eſt pars totius DBC triangulo ABC non poteſt eſſe æquale. a 37. 1.

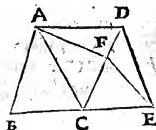
Eadem demonſtratio fieret ſi rectam AE velles cadere extra triãgulū ADC: non ergo erit alia parallela quam AD. *Reciprocum eſt hoc Theore. prop. 37.*



Propo

Propositio 40. Theore. 30.

Æqualia triangula & ad easdem partes super æqualibus basibus constituta sūt inter easdem parallelas.



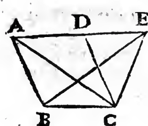
Nā si triangula ABC, DCE posita sint æqualia & super æqualibus basibus BC, CE; neges tamen rectam AD ipsi BE esse parallelā, sit parallela AF. Tunc vero ductâ FE, triangulum FCE erit a æquale ipsi ABC, cui eidem æquale ponitur triangulum DCE; erunt ergo pars & totum eidem æqualia, quod esse nequit. *Et hanc manifestum est esse conuersam propo.* 38.

a 38. 1.

Propo. 41. Theore. 31.

Si parallelogrammum & triangulum eandem habuerint basim sintque in iisdem parallelis, erit parallelogrammum duplum trianguli.

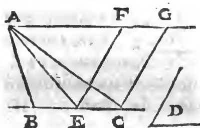
Sint parallelogrammum BD, & triāgulum EBC, super eadem basi BC, & inter



inter parallelas AE, BC; ducaturque AC. Quia ergo triãgula ABC, a EBC sunt æqualia, & ABC est dimidium parallelogrammi BD, sequitur etiam triangulum EBC, eiusdem parallelogrammi esse dimidium. a 37. 1.

Propo. 42. Proble. 11.

Dato triãgulo æquale parallelogrammũ cõstituere in dato angulo rectilineo.



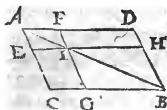
Sint data triangulum ABC, & angulus D; basique BC, bifariã secta in E, ducatur AE, agaturq; a per A, recta AG ipsi BC, parallela, mox ad E punctum, facto angulo FEC, b ipsi D æquali, educatur ex C, recta CG, ipsi FE parallela. Quia ergo triangula ABE, AEC, super c æqualibus basibus BC, EC sunt æqualia; & triangu- a 31. 1. b 10. 1. c 38. 1.

triangulum AEC, parallelogrammi super eadem basi EC, constructi *a* est dimidium, sequitur totum triangulum ABC, esse æquale parallelogramo EG. Dato ergo triangulo æquale parallelogrãmũ constituimus, habens angulum FEC dato angulo D æqualem.

a 41. 1.

Propo. 43. Theore. 32.

Omnis parallelogrammi eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorũ cõplemẽta sunt inter se æqualia.



Circa diametrum AB, parallelogrãmi CD, consistãt parallelogrã-ma EF, GH; complementa vero quę dicuntur, sint parallelogramma CI, ID, per quæ diameter AB, non transit; quia igitur diameter AB, diuidit bifariam parallelogramma CD, EF, GH, *a* erunt triangula AEI, IGB, æqualia triangulis AFI IHB; sed & totum ABC, toti triãgulo ABD, æquale est: complemẽta ergo CI, ID, sunt etiam æqualia. Omnis ergo parallelogram. &c.

a 34. 1.

Pro. 44.

Propo, 44. Proble. 12.

Ad datam rectam parallelogrammum constituere dato triangulo æquale in dato angulo rectilineo.

Sit data recta A, triangulum B, angulus C: Fiat deinde parallelogrammum DG [a] æquale triangulo B, habeatque angulum DFG angulo C æqualem. Posthęc producto latere FG, in H, ita vt GH sit æqualis rectæ A, per H agatur LN, [b] parallela ipsi E G, & occurrens lateri DE, in puncto N. Rursus producto latere DF, ducatur ex N, diameter per H occurrens ipsi DF, in K, ductâque per K, recta KL, parallelâ ipsi FH latus EG producatur in M. Quo facto dico parallelogrammum GL, esse quod petitur: nam quia complementa [c] sunt æqualia, si complementum GD, est æ-

a 42. 1.

b 31. 1.

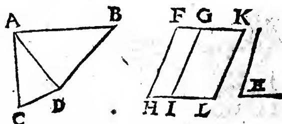
c 34. 1.

E ęqua-

le triangulo B, erit etiam GL, eidem B, æquale; sed & angulus MGH, æqualis
a 15. 1. est angulo FGE, oppositoᵃ ad verticẽ, quare & ipsi C erit æqualis; estque recta GH, æqualis datæ rectæ A: Igitur ad datam rectam &c.

Propo. 45. Proble. 13.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum cõstituere in dato angulo rectilineo.

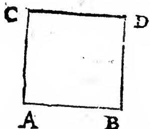


Sit datus angulus E, & rectilineum
a 44. 1. BC, in quo ductâ rectâ AD, fiat parallelogrammum FI, ᵃ æquale triangulo ACD in angulo H qui sit ipsi E æqualis: protrahatur deinde latus HI & ad rectam GI in angulo GIL (qui est æqualis ipsi H, quare & ipsi E) fiat parallelogrammum GL, æquale triangulo ABD, eritque tota figura FL parallelogram-

grammum: nam L K, parallela est ipsi FH, cum vtraque sit ipsi GI parallela, cumque Gk, ipsi IL sit parallela; sicut HL est vna recta ita etiam Fk; sunt vero FG HI parallelæ, quare etiam totæ Fk HL, erunt parallelę. Dato ergo rectilineo &c.

Proposi. 46. Proble. 14.

A data recta linea quadratum describere.



Sit data recta AB, ad cujus extrema A & B [a] excitētur perpendiculares CA, DB, ipsi AB æquales, iungaturq; recta CD, & cōstitutum est quadratum. Cum enim anguli A & B, sint recti, [b] erunt AC, DB parallelæ, suntque etiam æquales, ex constructione quare CD, AB, sunt quoque parallelæ & ęquales; ac propterea AD, est parallelogrammum; cumque anguli A & B; sint recti [c] erūt etiam oppositi C, & D, recti: sunt vero tria la-

a 11. 1.

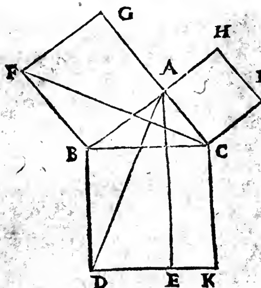
b 28. 1.

c 34. 1.

tera reliqua ſumpta ęqualia ipſi A B, quare figura AD, eſt quadratum, ex deſinit. 27.

Propo. 47. Theore. 33.

In rectangulis triangulis quadratum quod à latere rectum angulum ſubtẽdente deſcribitur, æquale eſt eis. quæ à laterib. rectum angulũ continentibus deſcribuntur, quadratis.



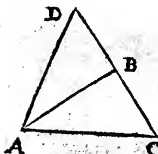
a 46. 1. In triangulo A B C, angulus BAC, rectus ſit fiantque ſuper a lateribus AB, AC

AC, quadrata BG, CH. Item fiat super latere BC, angulum rectum subtendente quadratum BK, quod dico ęquale esse duobus aliorum laterum quadratis simul sumptis; ductâ enim AE, parallelâ ipsi BD, aut Ck, iungantur etiam rectæ AD, FC. Quia igitur angulus DBC, angulo FBA, rectus recto est æqualis, addito comuni ABC, pares erunt anguli DBA, FBC; sunt insuper triangulorũ ABD, FBC latera DB, BC, ipsis BA, BF singula singulis ęqualia: triangula igitur ABD, FBC, [b] sũt æqualia: sed triãgulũ ABD, est dimidiũ [c] parallelogrãmi BE, cum sit super eadem basi BD, inter parallelas BD, AE, & easdem ob causas triangulum FBC, est dimidiũ quadrati BG; quadratum ergo BG ęquale est parallelogrammo BE, cum eorum dimidia sint paria. Quod si puncta BI, AK, coniungantur duabus lineis rectis, eadem plane methodo probabitur parallelogrammum EC, quadrato CH, esse æquale. Totum igitur quadratum Bk, reliquis duobus æquale est. In rectangulis igitur &c.

b 4. 1.
c 41. 1.

Propo. 48. Theore. 35.

Si quadratum ab vno trianguli latere descriptum æquale est duobus reliquorum laterum quadratis, angulus quem reliqua latera continent est rectus.



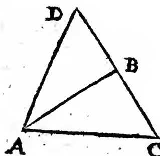
In triangulo ABC, sit latus AC huiusmodi, vt eius quadratum æquale sit quadratis duorum reliquorum laterum AB, BC; dico angulum ABC, contentum iisdem reliquis lateribus esse rectum. Nam si ducatur ex B, ipsi AB, perpendicularis BD, ipsi BC æqualis, iungaturque recta AD, tunc quia angulus ABD, rectus est, erit quadratum ipsius
a 47. 1. AD, æquale quadratis a rectarum AB, & BD, vel BC; cumque quadratum ipsius AC, quadratis earundem AB, BC, ponatur æquale, erunt lineæ AC, AD æquales inter se. Quia ergo duo triangu-
b 8. 1. la ABC, ABD, habent tria latera b æqualia

qualia, sũt etiam anguli omnes ęquales qui ſibi reſpondẽt: vnde quia angulus ABD rectus, eſt rectus etiam erit ABC; ſi ergo quadratum &c. *Eſt conuerſa præcedentis, vt ſatis patet.*



Propo. 48. Theore. 35.

Si quadratum ab uno trianguli latere descriptum æquale est duobus reliquorum laterum quadratis, angulus quem reliqua latera continent est rectus.



In triangulo ABC, sit latus AC huiusmodi, vt eius quadratum æquale sit quadratis duorum reliquorum laterum AB, BC; dico angulum ABC, contentum iisdem reliquis lateribus esse rectum. Nam si ducatur ex B, ipsi AB, perpendicularis BD, ipsi BC æqualis, iungaturque recta AD, tunc quia angulus ABD, rectus est, erit quadratum ipsius AD, æquale quadratis [a] rectarum AB, & BD, vel BC; cumque quadratum ipsius AC, quadratis earundem AB, BC, ponatur æquale, erunt lineæ AC, AD æquales inter se. Quia ergo duo triangula ABC, ABD, habent tria latera [b] æqualia

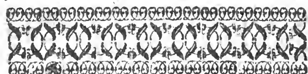
a 47. 1.

b 8. 1.

qualia

qualia, sũt etiam anguli omnes ęquales qui ſibi reſpondẽt: vnde quia angulus ABD rectus, eſt rectus etiam erit ABC; ſi ergo quadratum &c. *Eſt conuerſa præcedentis, vt ſatis patet.*



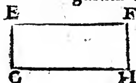


EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER II.

Definitiones.

1 Parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus lineis quæ rectum angulum comprehendunt.

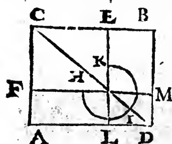


Ut parallelogrammũ rectãgulum FG continetur sub rectis HG, EG cõtinẽtibus angulũ rectũ G. Itẽ sub rectis HF, FE.

Simile aliquid in numeris videre est: sicut enim rectangulum continetur sub duabus lineis, ita figuratus numerus rectãgulus continetur sub numeris duobus qui inter se multiplicati producunt numerum aptum tali figurę. Sic numerus rectãgulus 12 continetur sub 3 & 4 qui inter se multipli-

tiplicati efficiunt 12, numerum aptum figura rectangula.

11 In omni parallelogrammo spatio vnum quodlibet eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrãmorum cum duobus complemẽtis gnomõ vocetur.



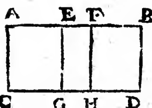
Vt in parallelogrammo AB, parallelogrammum LM cum duobus cõplemẽtis EM, LF, vocatur gnomon. Item parallelogrammum FE cum duobus ijsdem complementis est gnomon. Solet autem gnomon designari linea curua quæ transit per complementa & parallelogrammum intermedium, qualis est HIk.

Propositiones.

Propo. 1. Theore. 1.

Si fuerint duæ rectæ quarum altera secetur in quotcunque segmenta, rectangulum sub duabus illis rectis contentum æquale erit omnibus simul rectãgulis

gulis, quæ sub insecta & partibus lineæ secta continentur.



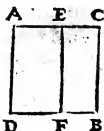
Sub rectis AB, AC contineatur rectangulum AD, rectâque AB vtcũque diuisâ in E & F, ducantur FH & EG ipsi BD, parallelæ; eruntque AG, EH, FD, rectangula; nam angulus EGH ipsi C b est æqualis, & omnes alios facile est ostendere alicui recto esse æquales,
b 29. 1.
Manifestum est etiam rectangula partialia AG, EH, FD, simul sumpta toti rectangulo AD esse æqualia: nam a omnes partes simul sumptæ toti sunt æquales. Et hoc tantum vult propositio.
a 19. ax.
Nam AB, AC, sunt duæ rectę; quarum AB, secta est vtcunque in E & F: ostensum est autem rectangulum AD ipsis AB, AC cõtentum, ęquale esse rectangulis partialibus quæ continentur sub insecta AC & partibus lineæ sectę AB: rectangulũ enim AG, continetur sub insecta AC & parte AE; reliqua vero EH, FD, continentur sub EG, FH (hoc est

eſt ſub inſecta AC ipſis æquali) & reliquis partibus EF, FB. Si ergo fuerint duæ rectæ.

Idem videre eſt in numeris. Si enim detur duo numeri 4 & 10, & alter eorum puta 10 diuidatur in quotuis partes 5, 3, 2, ex multiplicatione ipſius 4 in omnes partes 5, 3, 2, fient 40. ſicut ex multiplicatione eiuſdem 4 in totum numerum 10.

Propo. 2. Theore. 2.

Si recta ſecta ſit vtcumque: rectangula ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenſa, æqualia ſunt ei, quod a tota fit, quadrato.



Rectangulum AB, ſit quadratum rectæ AC, rectâque AC vtcumque diuiſâ in E, ducatur EF ipſi CB parallela, & manifeſtum eſt, vt prius, rectangula partialia AF, EB ſimul ſumpta, toti AB eſſe æqualia. Neque aliud vult propoſitio. Nam recta AC vtcunque ſecta eſt in E; rectangula autem AF, EB,

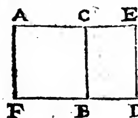
con-

contenta sub AD EF (hoc est sub tota AC) & sub partibus AE, EC æqualia sunt quadrato totius AC, quod est AB. Si ergo recta &c.

In numeris: si 10 diuidatur in duas partes 7 & 3, ducendo 10 in 7, & 3 fient 70. & 30, quæ simul æqualia, sūt numero quadrato ipsius 10 qui est 100: dicimus enim numerum quadratum qui fit ex ductu cuiusuis numeri in seipsum.

Propos. 3. Theore. 3.

Si recta secta sit vtcunque, rectangulum sub tota & vno segmentorum comprehensum æquale est illi quod sub segmentis comprehenditur rectangulo vna cum quadrato, quod à prædicto segmento describitur.



Recta AE vtcunque secetur in C, sitque AB, quadratum segmēti AC, rectangulum vero AD cōtineatur sub tota AE & sub AF hoc est sub æquali AC; & manifestum est vt prius rectangula AB, CD

CD ſimul ſumpta, toti AD eſſe ęqualia, Neque aliud vult hæc propoſitio. Nam recta AE vtcunque ſecta eſt in C, & rectangulum AD, ſub tota AE & AF hoc eſt ſub parte AC, æquale eſt ipſi AB quadrato partis AC vna cum rectangulo CD, quod continetur ſub CB (hoc eſt ſub parte AC) & ſub reliqua parte CE. Si ergo recta &c.

In numeris ſi 6 dimidatur in 4 & 2, productum ex 6 in 4 h. c eſt 24, ęquale eſt ei quod fit ex 4 in 2 hoc eſt 8, vna cum quadrato ipſius 4 quod eſt 16.

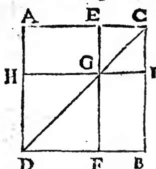
Propo. 4. Theore. 4.

Si recta ſecta ſit vtcunque, quadratum quod a tota deſcribitur æquale eſt ſegmentorum quadratis, vna cum rectangulo quod bis ſub ſegmentis continetur.

Rectangulum AB ſit quadratum ipſius AC; ductâque diametro DC, agatur EF ipſi CB parallela, ſecans diametrum vtcunque in G, per quod idem punctum agatur HI ipſi AC parallela: & manifeſtum eſt vt prius quadratum

AB

AB totius AC, esse æquale omnibus simul rectangulis intra se descriptis.



Neque aliud vult propsitio. Nam recta AC secta est vtcunque in E, & eius quadratum AB ęquale est ipsis HF, EI (quæ sũt quadrata segmentorum AE, EC) simul cum rectangulis AG, GB, quę sunt rectangulum bis comprehẽsum sub partibus AE, EC.

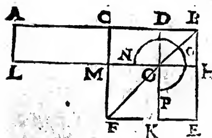
Rectangula autem HF, EI, esse quadrata partium AE, EC (etsi ex constructione & definitione quadrati satis poterat colligi) sic demonstro. Quia rectæ AE, GH, DF iungunt parallelas æquales,
a 34. 1. sunt *a* & ipsæ inter se æquales. Itẽ si ab æqualibus AC, BC auferantur æquales EC, IC, quę remanent AE, BI & quæ huic pares sunt GF, HD, omnes inter se erunt æquales. omnia igitur latera parallelogrammi HF, æqualia sunt parti AE, suntque omnes anguli recti; nam quia HDF rectus est & rectus etiam

GFD

GFD (cum sit æqualis ipsi B) etiã *b* oppositi reliqui erunt recti. Est ergo HI quadratum ipsius AE. Similiterque ostendetur EI esse quadratum partis EC. Et sic demonstrata est tota propositio. *b* 34. 1.
In numeris: Si 6 diuidatur in 4 & 2; quadratum ipsius 6 quod est 36 æquale est quadratis partium 4 & 2 hoc est 16 & 4, vnà cum numero 8 bis repetito qui fit ex partibus 2 & 4 inter se multiplicatis.

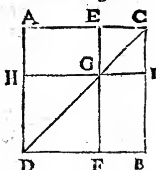
Propo. 5. Theor. 5.

Si recta secetur in æqualia & non æqualia: rectangulum sub inæqualibus segmẽtis totius comprehensum, vna cũ quadrato segmenti intermedij, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.



Recta A B bifariam in C, & non bifariã in D diuidatur; & super dimidia CB fiat quadratũ CE ductâq; diame-

AB totius AC, esse æquale omnibus simul rectangulis intra se descriptis.



Neque aliud vult propsitio. Nam recta AC secta est vtcunque in E, & eius quadratum AB æquale est ipsis HF, EI (quæ sũt quadrata segmentorum AE, EC) simul cum rectangulis AG, GB, quę sunt rectangulum bis comprehẽsum sub partibus AE, EC.

Rectangula autem HF, EI, esse quadrata partium AE, EC (etsi ex constructione & definitione quadrati satis poterat colligi) sic demonstro. Quia rectæ AE, GH, DF iungunt parallelas æquales, sunt *a* & ipsæ inter se æquales. Itẽ si ab æqualibus AC, BC auferantur æquales EC, IC, quę remanent AE, BI & quæ huic pares sunt GF, HD, omnes inter se erunt æquales. omnia igitur latera parallelogrammi HF, æqualia sunt parti AE, suntque omnes anguli recti; nam quia HDF rectus est & rectus etiam

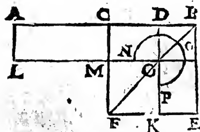
a 33. 1.

GFD

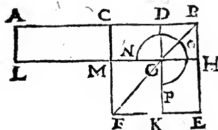
GFD (cum sit æqualis ipsi B) etiã *b* oppositi reliqui erunt recti. Est ergo HI quadratum ipsius AE. Similiterque ostendetur EI esse quadratum partis EC. Et sic demonstrata est tota propositio. *b* 34. 1.
In numeris: Si 6 diuidatur in 4 & 2; quadratum ipsius 6 quod est 36 æquale est quadratis partium 4 & 2 hoc est 16 & 4, vnà cum numero 8 bis repetito qui fit ex partibus 2 & 4 inter se multiplicatis.

Propo. 5. Theor. 5.

Si recta secetur in æqualia & non æqualia: rectangulum sub inæqualibus segmẽtis totius comprehensum, vna cũ quadrato segmenti intermedij, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.



Recta A B bifariam in C, & non bifariã in D diuidatur; & super dimidia CB fiat quadratũ CE ductâq; diame-



diametro FB agatur per D recta Dk ipsi BE parallela, secans diametrũ in G, per quod punctũ agatur LH ipsi AB parallela, & adiũgatur recta AL ipsi BH parallela. Quo facto erit rectãgulum AG sub inęqualibus segmentis AD, DB, hoc est DG, contentum, vna cum MK quadrato medij segmẽti CD, æquale quadrato dimidię CB, quod est CE. Nam rectangulum AM æquale est
a 36. 1. ipsi DE, cum vtrumque ipsi CH a sit æquale; cætera autem nimirum CG & MK sunt communia. Quare si recta &c.

In numeris: Diuidatur numerus 10 æqualiter in 5 & 5. inæqualiter in 7 & 3; ita vt numerus medius inter sectiones sit 2: quo dimidius numerus superat 3 partem minorẽ ex inæqualibus: eritq́ numerus 21 ex 7 in 3 vna cum quadrato numeri intermedij 2 quod est 4, æquale quadrato dimidij 5, seu 25.

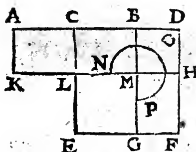
Corol-

Corrollarium.

Ex his manifestum est gnomonem NOP toti rectangulo AG esse aequalem; quandoquidem CG sit commune, & DE reliquo rectangulo AM sit aequale.

Propositio 6. Theore. 6.

Si recta bifariam secetur eique in rectum quaedam recta adijciatur, erit rectãgulũ sub tota cũ adiecta, & sub adiecta contentũ, una cũ quadrato dimidiae, aequale ei, quod à dimidia cum parte adiecta fit, quadrato.

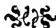


Recta AB bifariam secetur in C eique in rectum adijciatur BD: inde super recta CD fiat quadratum a CF & per B agatur BG pa- a 46. 1. pallela ipsi DF, sumptâque DH aequali ipsi DB agatur per H recta HK ipsi AD parallela & aequalis, iungaturque recta Ak: quo facto demonstratur propo-

 sitio

sitio. Nam quia rectangula AL, CM,
b 36. 1. sunt ęqualia propter [b] æquales bases, & eidem CM æquale est
c 43. 1. alterum complementum [c] MF, erit etiam MF æquale ipsi AL & additis cõmunibus CM, BH, gnomon NOP toti rectangulo AH æqualis fiet (quod sanè rectangulum continetur sub tota composita AD & parte adiecta DB cui DH æqualis sumpta est) sed gnomon NOP adiecto LG quadrato partis dimidiæ
d 5. 2. CB, vt supra in simili [d] ostendimus, fit ęqualis quadrato ipsius CD, quæ est pars dimidia cum adiecta BD. Igitur parallelogrãmum AH adiecto eodem
e 13 ax. quadrato LG fiet [e] æquale eidem quadrato CF, quod erat probandum.

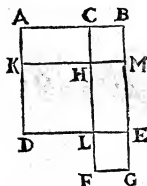
In numeris: si 6 diuidatur æqualiter in 3 & 3, eique addatur 2; numerus 16 (qui fit ex toto 6 cum adiecto, in ipsum adiectum) vna cum quadrato dimidij, quod est 9 æqualis est quadrato ipsius 5 qui numerus componitur ex dimidio 3 & adiecto 2.



Pro-

Propof.7. Theore. 7.

Si recta vtcunque fecetur, quadrata totius & vtriusuis fegmēti fimul fumpta, paria funt rectangulo bis fumpto fub tota & dicto fegmento, vna cum adiuncto alterius fegmenti quadrato.



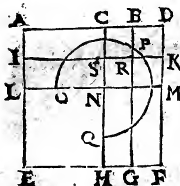
Recta AB fecta fit vtcunque in C & fuper AB, fiat quadratum AE, ducanturq; CL, kM; vt in fuperiori propofitione: fumptâ deinde LF ęquali ipfi CB, addatur quadratum LG. Erunt igitur quadratum totius AB, quod eft AE fimul cum quadrato fegmenti CB, quod eft LG, æqualia *a* rectangulis AM, MF(quæ fumuntur fub tota AB & fegmento BC, cum BM fit ipfi BC æqualis, & in rectangulo MF æqualia latera fint MG, GF, ipfis AB, BC) vna cum quadrato alterius fegmēti AC quod eft kL. Si igitur recta &c. *a 13. ax.*

In numeris: fi 6 vtcunque diuidatur in 4 & 2 quadratum totius 6 vna cum quadrato

drato ipsius 4, æqualia sunt numero 52 quæ fit ex numero 6 bis in 4. vna cum quadrato alterius partis 2 quod est 4.

Propo. 8. Theore. 8.

Si recta secetur vtcunque, rectangulum quater comprehensum sub tota & vno segmentorum, vna cum alterius partis quadrato, æqualia sunt quadrato quod fit à tota & segmento, tanquam ab vna linea.



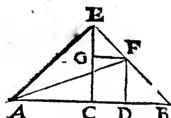
Recta AB vtcunque secetur in C cui adiiciatur in rectum BD ipsi BC æqualis, ac super tota AB & adiuncto segmento BD æquali ipsi BC fiat tanquam super vna linea quadratum AF, ducanturque BG, CH, Ik, LM, lateribus quadrati AF parallelę, sic vt DK KM ipsis BD, BC sint æquales. Erunt sane in gnomō OPQ rectangula quatuor contenta sub rectis AB

AB & BC. Nam circa R constituta sunt quadrata quatuor, quorum latera omnia ipsi BC sunt ęqualia; si igitur vnicuique ex quatuor complementis AS, & similibus, adiiciatur suum quadratũ, inuenientur in gnomone OPQ quatuor vt dixi rectangula ęqualia ipsi AR, quod continetur sub AB, BR hoc est BC. Est vero gnomon OPQ seu quatuor rectangula sub tota AB & segmẽto BC cum adiuncto EN quadrato alterius partis AC, *a* æqualis quadrato AF, quod fit super AD. Si igitur recta &c. *a* 1. ex.

In numeris si 6 vtcunque secetur in 4 & 2, ducendo quater numerum 6 in 4 & addendo quadratum ipsius 2, fiet numerus aqualis quadrato ipsius 10 qui numerus componitur ex toto 6 & parte 4.

Propositio 9. Theore. 9.

Si recta secetur per aequalia & non aequalia, quadrata partium inaequalium dupla sunt quadratorum ab vno dimidio, & ab ea linea quae sectionibus interijcitur, descriptorum.



Recta AB secetur æqualiter in C, inæqualiter in D; super quã ad C erigatur CE perpendicularis, & ipsi CA vel CB æqualis, ducãturque AE, EB, itẽq; DF ipsi CE, & FG ipsi CD parallela, ac denique iũgatur recta AF. Iam vero quia in triangulo ACE latera
a 5. I. CA CE æqualia sunt: anguli a CAE AEC pares erunt: est autem angulus ECA rectus: duo ergo alij sunt semirecti. Similiterque in triangulo ECB anguli CBE, BEC, semirecti sunt: totus ergo angulus AEB rectus est. Cumque in triangulo EGF, angulus G rectus sit & GEF semirectus, erit etiam angulus
b 6. I. GFE semirectus. Quare latera GE, GF,
c 34. I. b æquales angulos subtendentia, sunt æqualia. Æqualis etiã vtrique c est recta CD, cum CF sit parallelogrammum: Quare si ab æqualibus CE CB auferantur æqualia GE, CD, recta CG, hoc est DF, ipsi DB erit æqualis.

His intellectis sic breuiter colligitur propositio. Quadrata partium inæqualium

lium AD,& DF siue DB, *d* æquiualent *d 47. 1.*
quadrato ipsius AF, & hoc quadratum
ex AF æquiualet ijs quæ fiunt ab AE,
EF: Sed harũ quadrata dupla sunt quadratis
rectarum AC dimidiæ, & CD
partis sectionibus interiectæ; cum enim
AC, CE sint pares, & AE det quadratum
vtriusque quadratis æquale, efficiet
duplum quadrato ipsius AC; similiterque
EF dabit duplum quadrati ipsius
GF seu CD. Quare quadratum ipsius
AF, & partium inæqualium AD &
DF, hoc est DB duplũ sunt quadratorũ
ex AC CD; partis scilicet dimidię & lineæ
sectionibus interiectæ. Si igitur recta &c.

In numeris: Numerus 10 diuidatur æqualiter in 5 & 5, inęqualiter in 7 & 3, sitque intermedia sectio 2, vt prop. 5. Quadrata ergo 49 & 9 partium inęqualium 7 & 3, sunt duplum, quadratorum partis dimidiæ 5 & sectionis intermediæ 2.



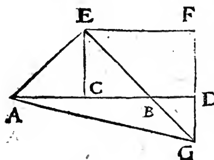
Propoſitio 10. Theore. 10.

Si recta ſecetur bifariam & in rectum alia adiiciatur, quadratum quod fit a tota cum adiecta, ſimul cum eo quod fit a ſola adiuncta, duplum ſunt quadrati quod fit a dimidia, & alterius quod à dimidia & adiuncta deſcribitur.

Recta AB, bifariam ſecetur in C, adiectâ BD, cui ad C erigatur perpendicularis CE, dimidię AC æqualis, perficiaturque parallelogrammum ED, ductaque EB. occurrat lateri FD producto in G, iunganturque AG, AE, eritq; angulus a AEB conſtans duobus ſemirectis, vt in ſimili oſtenſum eſt prop. prox. Quare & angulus EBC ſemirectus eſt: ſemirectus b quoque DBG oppoſitus ad verticem, quare & DGB ſemirectus erit, & latera c BD, DG æqualia. Æqualia item erunt latera FG, FE, quia anguli ad baſim EG ſunt pares. His poſitis quadratum d ex AE erit duplum quadrato dimidię AC, & quadratum ex GE, duplum quadrati ex EF, hoc

a 10. 2.
b 15. 1.
c 6. 1.
d 41. 1.

hoc eſt ex dimidia CB cum adiuncta BD. Sed & ipſius AG quadratum æquiualet quadratis duarum AE, EG; & quadratũ ex tota AB cum adiũcta BD vna cum quadrato



ex DG, ſeu adiuncta BD çquiualet quadrato ex AG. Quare harum linearum AB, BD quadrata duplum quoque ſunt quadratorum ex AC & CD. Si igitur recta &c.

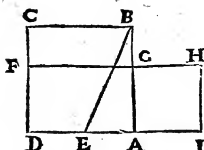
In numeris: Diuidatur 6 æqualiter in 3 & 3, eiq; addatur 2, vt ſit numerus compoſitus 8; quadrata igitur ipſius 8 & adiecti 2, duplum ſunt quadratorum dimidij 3, & numeri 5 qui conſtat dimidio & adiecto.



Prop.

Propo. 11. Proble. 1.

Datam rectam ita secare, vt rectangulum sub tota & altero segmentorum, æquale sit quadrato quod fit a reliqua parte.



Sit data recta A B ita secanda vt rectágulum sub tota & segmento altero, ęquale sit quadrato partis alterius. Fiat igitur super AB quadratum AC, diuisoque latere AD bifariam in E ducatur EB cui ęqualis fiat EI latere DA producto: fiat insuper quadratum super AI quod sit GI producto latere HG in F: eritque recta AB diuisa vt oportuit; siquidem rectangulum CG sub tota CB seu AB, & segmento BG ęquale est quadrato GI quod fit à segmento altero GA: quia enim DA secta est bifariã in E, eique in rectum addita est AI erit
a 6. 2. rectangulum a sub DI, AI, hoc est ipsum

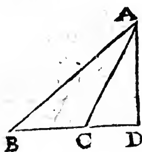
ſum DH vna cum quadrato dimidiæ EA æquale quadrato ipſius EI, ſeu EB. Eſt vero quadratum ipſius EB b æquale quadratis ipſarum AB AE. Vnde rectangulum DH cum quadrato ex AE erit etiam equale quadratis earundem AB & AE. Ablato igitur communi quadrato ipſius AE erit rectangulum DH æquale quadrato ipſius AB quod eſt AC; & rurſus ablato ab hoc quadrato & rectangulo DH, communi rectangulo AF, rectangulum CG relictum ex quadrato, æquale erit quadrato GI quod reliquum eſt ex rectangulo. Datam igitur rectam ita ſecuimus vt rectãgulum CG ſub tota AB & altero ſegmento BG, quadrato partis alterius GA eſſet æquale, quod erat faciendum. b 47. 1.

Propoſitio 12. Theore. 11.

In triangulo obtuſangulo quadratum lateris angulum obtuſum ſubtendentis tanto maius eſt quadratis laterum eundem angulum continentium, quãtum eſt rectangulum bis comprehenſum ſub vno latere continente, & ſub

linea

linea extrinsecus assumpta ad cuius extremum cadit perpendicularis ducta ab altero angulorum acutorum.



In triangulo ABC angulus ACB sit obtusus, productoq; latere BC, ex A demittatur AD perpendicularis ipsi BC, cadens in D: Dico igitur quadratum lateris AB obtuso angulo subtensi tanto esse maius quadratis laterum continentium BC, CA, quantum est rectangulum bis comprehensum sub BC & recta CD extrinsecus sumpta, ad cuius extremum ex acuto angulo A cadit perpendicularis AD. Quia enim recta BD secta est
a 4. 1. vtcunque in C erit [a] quadratum ex BD æquale quadratis ex BC CD, & insuper rectangulo bis sub BC, CD comprehēso: additoque vtrisque quadrato rectę AD erunt quadrata ipsarum BD, DA ęqualia quadratis trium rectarum BC, CD, DA, vnacum addito rectangulo

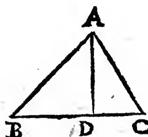
gulo bis ſub BC, CD, contento. Sed quadratum rectæ AB[b] æquiualet quadratis rectarum AD, DB. Igitur idem quadratum rectæ AB æquiualet etiam tribus quadratis rectarum BC, CD, DA, & rectangulo bis ſub BC, CD cōtento. Iam vero quia quadratum rectæ AC æquale eſt quadratis ipſarum CD DA, erit quadratum rectæ AB æquale quadratis rectarum CB, CA & rectangulo bis contento ſub BC CD. In triāgulo igitur obtuſangulo &c. b 47. 1

Hæc & ſequens prop. ad eas proportiones extenditur, quæ numeris exprimi non poſſunt.

Propo. 13. Theore. 12.

In triangulis acutangulis quadratum lateris acuto angulo ſubtenſi tanto minus eſt quadratis laterum continentium eundem angulum, quantum eſt rectangulum bis comprehenſum ſub vno laterum continentium & ſub aſſumpta interius linea prope acutum angulum ad cuius extremum cadit per-

perpēdicularis ab oppoſito angulo ducta.



In triangulo ABC angulus C ſit acutus, ducaturque ex A recta AD perpēdicularis ipſi BC. Dico igitur quadratum ipſius AB angulum C ſubtendentis, tanto minus eſſe quadratis ex BC, CA: quantum eſt rectangulum ſub BC DC bis contentum. Quia enim recta BC vtcunque ſecta eſt in D quadrata ex BC, CD paria ſunt rectāgulo bis ſub BC, CD, vna cum *a* duobus quadratis

a 7. 2. ex B D D C; ſed duobus quadratis re-

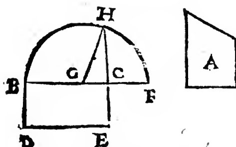
b 47. 1. ctarum CD, DA par eſt *b* quadratum ex CA: duo igitur quadrata ex BC, CA, paria ſunt etiam rectangulo bis comprehenſo ſub BD, DC & duobus quadratis ex BD, DA. Iam vero quia quadratis ex BD DA, æquale eſt *c* quod fit

c 47. 1. ex AB; erūt quadrata ex BC, CA, ęqualia rectangulo bis contento ſub BC, DC & quadrato rectæ AB. Quare quadra-

dratum ex AB tanto minus est quadratis ex BC, CA, quantum est rectangulum bis sub BDD C contentum, In triãgulis igitur &c.

Propo. 14. Proble. 2.

Dato rectilineo æquale quadratum describere.



Sit datum rectilineum A cui fiat a æquale parallelogrammum BE; in quo si latera B C, C E sunt ęqualia, ipsum erit quadratum quale petebatur. Quod si latera non sunt æqualia alterutrum puta BC producatur in F, sic vt CF ipsi CE æqualis sit, sectâque bifariam rectâ BF in G, centro G, spatio GB fiat semicirculus B H F, protracto latere EC vsque dum secet circulum in H: eritque quadratum ipsius CH, ęquale a 45. 1.

le dato rectilineo A. Ductâ enim recta GH, quia recta BF bifariam secta est in G & non bifariam in C, erit rectangulũ
b 5. 2. sub BC CF, hoc est b rectangulum BE, cum quadrato ipsius GC ęquale quadrato ex GF vel GH, quæ sunt lineæ æ-
c 47. 1. quales. At quadrata ex GC c CH valent quadratum ipsius GH; eadem ergo quadrata ex GC, CH valent rectangulum BE cum quadrato ipsius GC: relicto ergo communi quadrato rectę GC, quadratum ipsius CH valebit rectangulum BE quod ab initio factum est æquale rectilineo A. Quadratum ergo ipsius CA, æquale erit rectilineo A. Facto igitur quadrato super CH, constituerimus quadratum dato rectilineo æquale, quod erat faciendum.



EVCLI-

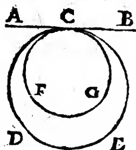


EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER III.

Definitiones.

1 Æquales circuli ſunt quorum diametri vel è centris lineę ad ambitum ductę, ſunt æquales.

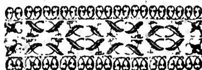


2 Linea recta circulum tangere dicitur quæ cum tangat, producta longius circulum non ſecat. *Talis eſt linea AB quæ cum tangat circulum CDE in puncto C, producta lõgius eum non ſecat.*

3 Circuli ſe tangere dicuntur qui cũ ſe tangant, ſe tamen mutuo non ſecãt. *Tales ſunt circuli CDE, CFG.*

4 In circulo æqualiter diſtare à cen-

le dato rectilineo A. Ductâ enim recta GH, quia recta BF bifariam secta est in G & non bifariam in C, erit rectangulũ
b 5. 2. sub BC CF, hoc est b rectangulum BE, cum quadrato ipsius GC ęquale quadrato ex GF vel GH, quæ sunt lineæ æ-
c 47. 1. quales. At quadrata ex GC c CH valent quadratum ipsius GH; eadem ergo quadrata ex GC, CH valent rectangulum BE cum quadrato ipsius GC: relicto ergo communi quadrato rectę GC, quadratum ipsius CH valebit rectangulum BE quod ab initio factum est æquale rectilineo A. Quadratum ergo ipsius CA, æquale erit rectilineo A. Facto igitur quadrato super CH, constituerimus quadratum dato rectilineo æquale, quod erat faciendum.



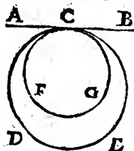
EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER III.

Definitiones.

1 Æquales circuli ſunt quorum diametri vel è centris lineę ad ambitum ductę, ſunt æquales.



2 Linea recta circulum tangere dicitur quæ cum tangat, producta longius circulum non ſecat. *Talis eſt linea AB quæ cum tangat circulum CDE in puncto C, producta lõgius eum non ſecat.*

3 Circuli ſe tangere dicuntur qui cũ ſe tangant, ſe tamen mutuo non ſecãt. *Tales ſunt circuli CDE, CFG.*

4 In circulo æqualiter diſtare à centro

le dato rectilineo A. Ductâ enim recta GH, quia recta BF bifariam secta est in G & non bifariam in C, erit rectangulũ
b 5. 2. sub BC CF, hoc est b rectangulum BE, cum quadrato ipsius GC ęquale quadrato ex GF vel GH, quæ sunt lineæ æ-
c 47. 1. quales. At quadrata ex GC c CH valent quadratum ipsius GH; eadem ergo quadrata ex GC, CH valent rectangulum BE cum quadrato ipsius GC: relicto ergo communi quadrato rectę GC, quadratum ipsius CH valebit rectangulum BE quod ab initio factum est æquale rectilineo A. Quadratum ergo ipsius CA, æquale erit rectilineo A. Facto igitur quadrato super CH, constituerimus quadratum dato rectilineo æquale, quod erat faciendum.



EVCLI-

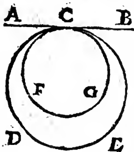


EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER III.

Definitiones.

1 Æquales circuli ſunt quorum diametri vel è centris lineę ad ambitum ductę, ſunt æquales.

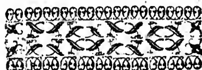


2 Linea recta circulum tangere dicitur quæ cum tangat, producta longius circulum non ſecat. *Talis eſt linea AB quæ cum tangat circulum CDE in puncto C, producta lõgius eum non ſecat.*

3 Circuli ſe tangere dicuntur qui cũ ſe tangant, ſe tamen mutuo non ſecãt. *Tales ſunt circuli CDE, CFG.*

4 In circulo æqualiter diſtare à centro

le dato rectilineo A. Ducta enim recta GH, quia recta BF bifariam secta est in G & non bifariam in C, erit rectangulũ
b 5. 2. sub BC CF, hoc est *b* rectangulum BE, cum quadrato ipsius GC ęquale quadrato ex GF vel GH, quæ sunt lineæ æ-
c 47. 1. quales. At quadrata ex GC *c* CH valent quadratum ipsius GH; eadem ergo quadrata ex GC, CH valent rectangulum BE cum quadrato ipsius GC: relicto ergo communi quadrato rectę GC, quadratum ipsius CH valebit rectangulum BE quod ab initio factum est æquale rectilineo A. Quadratum ergo ipsius CA, æquale erit rectilineo A. Facto igitur quadrato super CH, constituerimus quadratum dato rectilineo æquale, quod erat faciendum.



EVCLI-

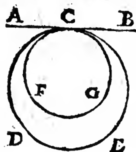


EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER III.

Definitiones.

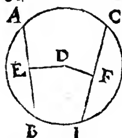
1 Æquales circuli ſunt quorum diametri vel è centris lineę ad ambitum ductę, ſunt æquales.



2 Linea recta circulum tangere dicitur quæ cum tangat, producta longius circulum non ſecat. *Talis eſt linea AB quæ cum tangat circulum CDE in puncto C, producta lõgius eum non ſecat.*

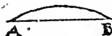
3 Circuli ſe tangere dicuntur qui cũ ſe tangant, ſe tamen mutuo non ſecãt. *Tales ſunt circuli CDE, CFG.*

4 In circulo æqualiter diſtare à centro

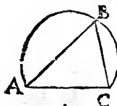


tro rectæ lineæ dicuntur cum perpendiculares à centro ad ipſas ductæ ſunt ęquales, *vt linea AB, CI, æqualiter diſtāt à centro D, quia perpendiculares DE, DF, à cētro D ad ipſas ducta, ſunt æquales.*

5 Segmentum circuli eſt figura quæ ſub recta linea & circuli circumferentia continetur. *Talis eſt figura contenta recta A B & circumferentia BC.*

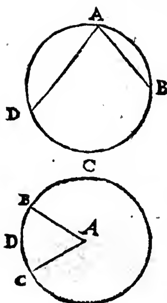


6 Segmenti angulus eſt qui recta linea & circuli peripheria continetur. *Tales ſunt anguli A & B.*



7 In ſegmento autem angulus eſt cum in ſegmenti circumferentia ſumptū fuerit punctum quodpiam, & ab illo ad lineæ terminos rectę fuerint adiunctæ. *Sic angulus ABC eſt in ſegmento CBA.*

8 Cum vero comprehendentes angulum datæ lineæ aſſumunt peripheriam



riam, illi ipsi assumptæ peripheriæ angulus indicitur sistere. *vt angulus DAB dicitur insistere circumferẽtia DCB.*

9 Sector autem circuli est cum ad ipsum circuli cẽtrũ angulus fuerit cõstitutus. *vt si ad centrum A sit constitutus angulus BAC, figura BACD dicetur sector circuli.*

10 Similia circuli segmenta sunt quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli sunt æquales.

Propositiones.

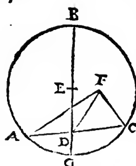
Propositio 1. Proble. 1.

Dati circuli centrum reperire.

In circulo A B C ducatur recta A C vtcunque, quâ bisectâ in *a* D, per idem punctum D agatur perpendicularis BG *b* attingens vtrimque ambitum. Diuidatur *c* deinde recta BG bifariam in E

a 10. 1. *b* 11. 1. *c* 10. 1.

G 2 erit-



eritque punctum E centrũ circuli. Non enim erit aliud punctnm in ipsa B G, cum centrum non possit in vlla linea esse nisi vbi secatur bifariam. Sed neque extra rectam BG. Fac enim esse in F ducnaturque FA, FD, FC; probabitur sanè angulum FDA esse rectum; nam in triãgulo ADF, CDF latera AD, DF sunt æqualia lateribus DF, DC & basis AF, basi FC, cum vtraque ducatur ex centro F ad ambitum. Erunt *d* ergo anguli FDC, FDA æquales, & proinde recti. Hoc autem esse non potest; nam angulus EDA rectus est. Maior igitur recto est FDA. Non est igitur F centrum; sed neque aliud punctum extra rectã BG: Dati ergo circuli centrum est E.

d 8. 1.

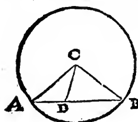
Propositio 2. Theore. 1.

Si in circuli ambitu duo puncta sumantur, recta ad illa puncta ducta intra circulum cadet.

a 1. 3. Sumantur puncta A & B, & ex *a* centro

tro inuento C ducantur rectæ CA, CB, CD, Dico punctum D & quodlibet aliud rectæ AB cadere intra circulum. Quia enim CA CB pares sunt, pares erunt anguli *b* A & B eritque angulus CDB maior opposito interno A; quare *c* maior etiã angulo B; latus agitur CB subtendens *d* angulum maiorem CDB, maius est latere CD subtendente minorem angulum B. Latus tamen CB tãtum pertingit ad ambitum, quare CB quod est minus, ad ambitum non pertinget. Non est igitur punctum D extra circulum; quod idem ostẽdetur de quouis alio in recta AB, si ergo in circuli ambitu &c.

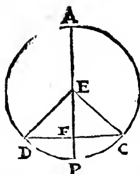
b 5. 1.
c 16. 1.
d 18. 1.



Propo. 3. Theore. 2.

Si in circulo recta per centrum ducta aliam non ductam per centrum secet bifariam, secabit quoque ad angulos rectos. Et si ad rectos secet, secabit bifariam.

Recta AB per centrum E ducta, se-



cet CD bifariam in F, ducantur e centro rectæ EC, ED. Quia ergo CE, CF, æqualia sunt lateribus DE DF, & basis communis, erunt

a 8. 1. a anguli EFD, EFC æquales, ac proinde recti.

Quod si anguli ad F recti sint; cum latera EC, ED trianguli ECD paria sint, erunt in triangulis EFC, EFD duo an, guli C & EFC duobus D & EFD æqua-

b 8. 1. les, & latera b EC, ED angulis opposita sunt equalia: æqualis ergo est basis FC basi FD. Si igitur in circulo &c.

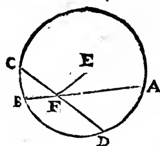
Proposi. 4. Proble. 3.

Si in circulo rectæ se secent non per centrum ambæ ductæ, non secabunt se mutuo bifariam.

Si enim per centrum transit vna, certum est eam bifariam non secari, cum non nisi in centro possit secari bifariã, & altera ex hypothesi per centrum non transeat. Quod si neutra transit per cẽ-

trum

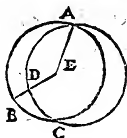
trum, vt in rectis AB, CD, intra circulum ADB ductâ à centro E rectâ EF, si vti tu vis, in puncto F secantur AB CD



bifariam erit angulus EFC rectus, cum *a* altera per centrum ducta secans alteram extra centrum bifariam, secet ad rectos: sed ob eandem causam angulus EFB rectus erit: pares ergo essent anguli EFB, EFC, pars & totum, quod fieri nequit. *a* 3. 1.

Propo. 5. Theore. 4.

Si duo circuli se mutuo secent non habebunt idem centrum.

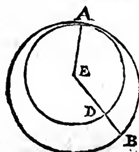


Circulorũ ABC ADC se mutuo in A & B secantium sit idẽ centrum E si fieri potest; ducanturq; EA à centro ad alterutrã sectionem, & ED secans vtcunque vtrumque circulum in pũctis D & B. Quia igitur circuli ADC cẽtrum ponitur E, erunt EA, ED æqua-

les, & quia circuli ABC idem centrum ponitur E, erunt EB EA ęquales; ergo & inter ſe eſsēt ęquales ED,EB pars & totum, quod eſſe nequit. Si ergo duo circuli &c.

Propoſitio 6. Theore. 5.

Si duo circuli interius ſe tangant, non erit eorum idem centrum.

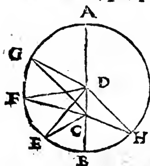


Nam ſi duo circuli ſe interius tangant in A & putentur habere idem cētrum E, ductis rectis E A, & alia vtcunq; EB ad circulum AB, oſtendetur vt ſupra ED & EB, partem ſcilicet & totum, æquales eſſe ipſi EA: quod abſurdum eſt. Si duo ergo circuli &c.

Propo. 7. Theor. 6.

In diametro circuli ſi aliud à centro pūctum accipiatur, à quo rectæ plures in circumferentiam cadant, maxima erit ea quæ per centrum ducitur; minima reliquum eiuſdem lineæ: aliarum vero maior eſt ea quæ tranſeunti per cen-

centrum est propior, neque plures quã duæ æquales duci possunt in circulum ad vtrasque partes ipsius minimæ.



In diametro AB sumatur punctum C aliud à centro D, ducanturq; vtcũq; rectæ CA CE, CF, CG. Dico maximam earum esse CA quę transit per centrũ D. Ductis enim rectis DE, DF, DG quia trianguli GDC duo latera GD DC, quibus ęqualis est AC, maiora erunt a reliquo GC. Maior ergò est AC quam GC; eodemq; modo quibusuis alijs ex C ductis ostẽdetur esse maior. a 20. 1.

2 Deinde quia latera EC, ED, maiora sunt reliquo ED cui æqualis est BD, si commune auferatur CD, latus CE maius remanebit quàm BC, & pari ratione ostendetur BC reliquis ex C esse minorem.

3 Rursum quia in triangulis G D C, FDC, duo latera GD, DC, duobus DF, DC paria sunt, & angulus GDC maior

esse EA quæ transit centrum F. Ductâ enim è centro recta FB, trianguli EFB
a 20. 1. duo latera EF, FB æqualia ipsi [a] EA, maiora erunt latere EB, & sic de reliquis.

2 Maior est etiam EB quæ propior est ipsi EA quam EC aut alia remotior. Nam quia trianguli EFB latera EF FB æqualia sunt lateribus EF, FC, trianguli EFC, & angulus EFB maior quam
b 24. 1. EFC, maior [b] erit basis BE, quam CE.

3 Ductis rectis FH, FI, FK, quia triãguli EHF maiora sunt duo [c] latera, FH
c 20. 1. HE reliquo EF, si auferantur æqualia FG FH, maior manebit EH extra circulum, & reliquæ EI EK, quam sit EG. Minima est ergo EG, quæ ad diametrũ GA ducitur.

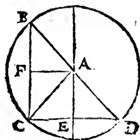
4 Quia intra triangulum EIF ducuntur rectæ EH, HE erunt hæ [d] minores
d 21. 1. ipsis EI, IF, ablatis ergo æqualibus HF, IF adhuc minor remanebit EH, quam EI, & ob eandem caussam minor est EI quàm Ek, quare minor est semper, quæ minimæ est propior.

5 Denique angulo HFG, si æqualis fiat GFL, ducaturque LE; quia triangula

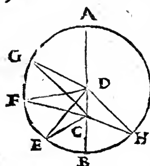
gula EHF, ELF latus habent commune EF, & alterum HF alteri LF æquale, & parem angulum contentum lateribus, erunt bases [e] EL EH æquales. Neque plures his duabus æquales duci possunt ex vtraque parte minimæ EF: nam aut propiores erunt aut remotiores à minima EF, quam sint EI, EH, quare his aut minores erunt aut maiores. Si ergo extra circulum &c. e 4. 1.

Propositio 9. Theore. 8.

Si ab aliquo intra circulum puncto plures quam duæ rectæ æquales ad ambitum ducantur, id punctum centrum est circuli.



Ex puncto A intra circulum BCD præter rectas AB, AC, ęquales, sit iisdem æqualis AD, ductisq; rectis BC, CD, diuisisque bifariam in E & F, ducantur ad ambitum rectæ AE AF. Quia ergo triangulorum ABF AFC latera duo sunt æqualia erunt



b 24. 1.

ior quam FDC, erit basis b GC, quæ propior est ipsi CA, maior remotiore CF.

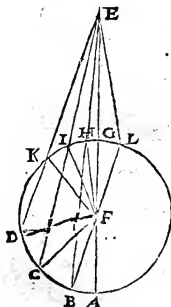
4 Denique si angulo EDB æqualis ponatur BDH ducaturque CH, in triãgulis EDC, HDC erunt bases CE CH æquales, cum anguli CDE, CDH, & latera e continentia sint ęqualia. Neque vero plures possunt duci ad partes minimæ BC ęquales prioribus. Si enim cadant intra puncta EH, remotiores runt à recta CA, ac proinde minores ipsis CE CH. Si autem ducantur extra puncta EH: erunt propiores ipsi CA ac proinde maiores. Si igitur in diametro &c.

e 4. 1.

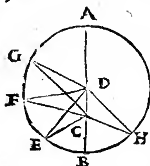
Propo. 8. Theore. 7.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, a quo ad circulum ducantur rectæ quædam lineæ, quarum una per centrum transeat, cæteræ ut lubet ducan-

ducantur, rectarum quæ ducuntur ad cauam peripheriam maxima erit quæ per centrum ducitur, & quæ huic propinquior, maior est remotiore. Extra circulũ vero minima quæ ab assũpto pũcto ad diametrũ tẽdit, & quæ huic propior, minor est remotiore, & duæ tantum lineæ æquales cadunt ab ab eo puncto in circulum ad partes minimæ vel maximæ.



Extra circulũ ABCD sumatur punctum E, à quo ducantur quotuis rectæ, quarũ vna EA per centrum F transeat, cęterę vero EB &c. vt lubet cadant in circulum. Dico 1. rectarum quæ ducuntur ad concauũ circuli, maximam esse



b 24. 1. ior quam FDC, erit basis b GC, quæ propior est ipsi CA, maior remotiore CF.

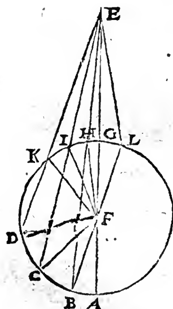
4 Denique si angulo EDB æqualis ponatur BDH ducaturque CH, in triãgulis EDC, HDC erunt bases CE CH æquales, cum anguli CDE, CDH, & latera e continentia sint æqualia. Neque vero plures possunt duci ad partes minimæ BC æquales prioribus. Si enim cadant intra puncta EH, remotiores runt à recta CA, ac proinde minores ipsis CE CH. Si autem ducantur extra puncta EH: erunt propiores ipsi CA ac proinde maiores. Si igitur in diametro &c.

e 4. 1.

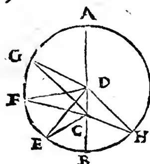
Propo. 8. Theore. 7.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, a quo ad circulum ducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna per centrum transeat, cæteræ vt lubet ducan-

ducantur, rectarum quæ ducuntur ad cauam peripheriam maxima erit quæ per centrum ducitur, & quæ huic propinquior, maior est remotiore. Extra circulũ vero minima quæ ab assũpto pũcto ad diametrũ tẽdit, & quæ huic propior, minor est remotiore, & duæ tantum lineæ æquales cadunt ab ab eo puncto in circulum ad partes minimæ vel maximæ.



Extra circulũ ABCD sumatur punctum E, à quo ducantur quotuis rectæ, quarũ vna EA per centrum F transeat, cęterę vero EB &c. vt lubet cadant in circulum. Dico 1. rectarum quæ ducuntur ad concauũ circuli, maximam esse



b 24. 1. ior quam FDC, erit basis b GC, quæ propior est ipsi CA, maior remotiore CF.

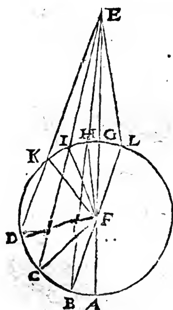
4 Denique si angulo EDB æqualis ponatur BDH ducaturque CH, in triãgulis EDC, HDC erunt bases CE CH æquales, cum anguli CDE, CDH, & latera c continentia sint ęqualia. Neque

c 4. 1. vero plures possunt duci ad partes minimæ BC ęquales prioribus. Si enim cadant intra puncta EH, remotiores runt à recta CA, ac proinde minores ipsis CE CH. Si autem ducantur extra puncta EH: erunt propiores ipsi CA ac proinde maiores. Si igitur in diametro &c.

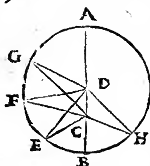
Propo. 8. Theore. 7.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, a quo ad circulum ducantur rectæ quædam lineæ, quarum una per centrum transeat, cæteræ ut lubet ducan-

ducantur, rectarum quæ ducuntur ad cauam peripheriam maxima erit quæ per centrum ducitur, & quæ huic propinquior, maior est remotiore. Extra circulũ vero minima quæ ab assũpto pũcto ad diametrũ tẽdit, & quæ huic propior, minor est remotiore, & duæ tantum lineæ æquales cadunt ab ab eo puncto in circulum ad partes minimæ vel maximæ.



Extra circulũ A B C D sumatur punctum E, à quo ducantur quotuis rectæ, quarũ vna EA per centrum F transeat, cęterę vero E B &c. vt lubet cadant in circulum. Dico 1. rectarum quæ ducuntur ad concauũ circuli, maximam esse



b 24. 1.

ior quam FDC, erit basis *b* GC, quæ propior est ipsi CA, maior remotiore CF.

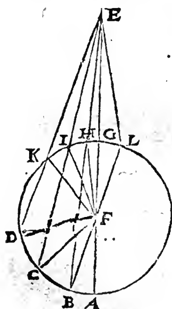
4 Denique si angulo EDB æqualis ponatur BDH ducaturque CH, in triãgulis EDC, HDC erunt bases CE CH æquales, cum anguli CDE, CDH, & latera *c* continentia sint ęqualia. Neque vero plures possunt duci ad partes minimæ BC ęquales prioribus. Si enim cadant intra puncta EH, remotiores runt à recta CA, ac proinde minores ipsis CE CH. Si autem ducantur extra puncta EH: erunt propiores ipsi CA ac proinde maiores. Si igitur in diametro &c.

c 4. 1.

Propo. 8. Theore. 7.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, a quo ad circulum ducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna per centrum transeat, cætcræ vt lubet ducan-

ducantur, rectarum quæ ducuntur ad cauam peripheriam maxima erit quæ per centrum ducitur, & quæ huic propinquior, maior est remotiore. Extra circulũ vero minima quæ ab assũpto pũcto ad diametrũ tẽdit, & quæ huic propior, minor est remotiore, & duæ tantum lineæ æquales cadunt ab ab eo puncto in circulum ad partes minimæ vel maximæ.



Extra circulũ A B C D sumatur punctum E, à quo ducantur quotuis rectæ, quarũ vna EA per centrum F transeat, cęterę vero E B &c. vt lubet cadant in circulum. Dico 1. rectarum quæ ducuntur ad concauũ circuli, maximam esse

esse EA quæ transit centrum F. Ductâ enim è centro recta FB, trianguli EFB duo latera EF, FB æqualia ipsi [a] EA, maiora erunt latere EB, & sic de reliquis.

a 20. 1.

2 Maior est etiam EB quæ propior est ipsi EA quam EC aut alia remotior. Nam quia trianguli EFB latera EF FB æqualia sunt lateribus EF, FC, trianguli EFC, & angulus EFB maior quam EFC, maior [b] erit basis BE, quam CE.

b 24. 1.

3 Ductis rectis FH, FI, FK, quia trianguli EHF maiora sunt duo [c] latera, FH HE reliquo EF, si auferantur æqualia FG FH, maior manebit EH extra circulum, & reliquæ EI EK, quam sit EG. Minima est ergo EG, quæ ad diametrũ GA ducitur.

c 20. 1.

4 Quia intra triangulum EIF ducuntur rectæ EH, HE erunt hæ [d] minores ipsis EI, IF, ablatis ergo æqualibus HF, IF adhuc minor remanebit EH, quam EI, & ob eandem caussam minor est EI quàm Ek, quare minor est semper, quæ minimæ est propior.

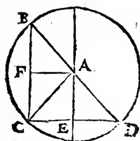
d 21. 1.

5 Denique angulo HFG, si æqualis fiat GFL, ducaturque LE; quia triangula

gula EHF, ELF latus habent commune EF, & alterum HF alteri LF æquale, & parem angulum contentum lateribus, erunt bases [e] EL EH æquales. Neque plures his duabus æquales duci possunt ex vtraque parte minimæ EF: nam aut propiores erunt aut remotiores à minima EF, quam sint EI, EH, quare his aut minores erunt aut maiores. Si ergo extra circulum &c. [e] 4. 1.

Propositio 9. Theore. 8.

Si ab aliquo intra circulum puncto plures quam duæ rectæ æquales ad ambitum ducantur, id punctum centrum est circuli.



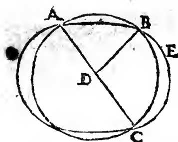
Ex puncto A intra circulum BCD præter rectas AB, AC, equales, sit iisdem æqualis AD, ductisq; rectis BC, CD, diuisisque bifariam in E & F, ducantnr ad ambitum rectæ AE AF. Quia ergo triangulorum ABF AFC latera duo sunt æqualia e-

runt

a 8. 1. runt anguli a ad F æquales & recti, rectus item ad E. Quia ergo AF rectam BC diuidit bifariam ad rectos, in ea est centrum circuli, & ob eandem causam est etiam in recta EA centrum circuli: Non potest ergo centrum aliud esse quam A, quia solum punctum A est vtrique AF & AE commune. Si igitur &c.

Propo. 10. Theore. 9.

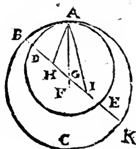
Circulus circulum in pluribus quã duobus punctis non secat.



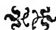
Secent se si fieri potest, circuli in tribus punctis A, B, C, centroque circuli ABC inuẽto a quod sit D
a 1. 3. ducantur rectæ DA, DB, DC: quę quia æquales sunt, & attingunt etiam ambitum circuli ABE, sequitur b punctum
b 9. 3. D esse etiã cẽtrum circuli c ABE, quod absurdum est. Non ergo secabunt se
c 5. 3. circuli in tribus punctis.

Propoſitio 11. Theore. 10.

Si duo circuli ſe interius contingant rectæ coniungens eorum centra producta incidet in contactum circulorum.



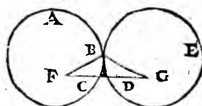
Circuli A B C, A D E interius in A ſe tangant: dico rectam quæ ducitur per centra F & G qualis eſt F A, cadere in contactum A. Nam ſi fieri poteſt, recta coniungens centra ſit I B K, in qua centrum circnli ABC ſit I, & alterius H, iunganturque rectę AH, AI. Quia ergo AH, HI reliquo latere AI a ſunt maiora, & proinde maiora quàm IB quæ ex eodem centro ducitur, ſi auferatur communis HI manebit AH maior quàm BH. Eſt ergo HD maior ipsâ HB, pars toto; quod abſurdum eſt. Eadem demonſtratio procedet etiamſi centrum circuli maioris extra minorem cadat. a 20. 1.



Pro-

Propositio 12. Theore. 11.

Si duo circuli sese exterius contingant; linea recta centra coniungens per cōtactum transibit.



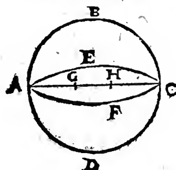
Si recta cōiungens centra circulorū ABC, BDE se tangētium exterius in B non transit per contactum B, sed alibi secet in punctis C & D, iūgens centra F & G; ducantur rectæ BF BG, eruntque duo latera FB, BG ma-
a 20. 1. iora a reliquo FG. Sed sunt etiam minora, nam FC ipsi FB ęqualis est, ex eodem centro F, similiterque GD ipsi GB erit æqualis. Superat ergo latus FG reliqua duo latera segmēto CD quod est absurdum. Recta igitur FG non iungit centra, & nulla iunget, nisi quæ transibit per contactum B.



Prop.

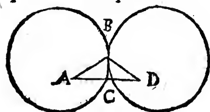
Propo. 13. Theore. 12.

Circulus circulum non tangit in pluribus pũctis siue intus tangat, siue extra.



Nam si circulum AB CD tãgat circulus AE CF interius in duobus punctis A & C erunt diuersa *a* circulorum centra, eaque in recta AC transeunte per contactus *b*. Sit ergo G centrum ipsius ABC, & H ipsius AEC. Tunc autem quia in recta AC ponitur cẽtrum circuli ABC esse G, esset *c* recta AC bifariam diuisa in G, & quia alterius circuli centrum est H, etiam in H esset diuisa bifariam; quod fieri nequit.

a 6. 3. *b* 11. 3. *c* 3. 3.



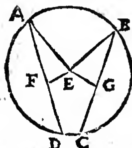
Sed neque exterius circuli se in pluribus punctis tãgẽt: Si enim in punctis B & C se tangunt

H ducta

ductâ rectâ AD per centra A & D nec-non per contactum C, itemque ductis AB,BD ad alterum contactum B, pro-
a 12. 3. baretur vt sup.[a] prop. latera AB BD,& maiora & ęqualia esse lateri AD.

Propos. 14. Theore. 13.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ distant à centro æqualiter inter se, sunt æquales.



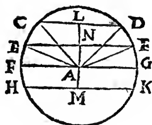
In circulo ABC sint pares rectæ AD, BC, & ex cẽtro E agantur EF, EG ad rectos ipsis AD, BC, ideoque
a 3. 3. [a] secãtes bifariam, iunganturque E A,E B. Quia ergo an-
b 47. 1. guli ad F & G sunt recti, quadratum ex EA æquale est [b] quadratis laterum AF, EF: & similiter quadratum ex EB duobus quadratis ex EG, GB. Nunc quia quadrata rectarum æqualium EA, EB sunt æqualia, erũt etiam quadrata duo rectarum EF, FA, æqualia duobus ex EG, GB, & ablatis quadratis rectarum ęqua-

æqualium FA, GB, manebunt quadrata rectarum EF EG ęqualia, quare EG EF sunt æquales, ac proinde AD BC æqualiter à centro distant.

E conuerso autem si positum sit rectas AD, BC distare æqualiter à centro E, ostendetur ex superiori demonstratione ablatis quadratis rectarum E F, EG æqualium, quadrata reliquarum FA, GB manere ęqualia; proinde & ipsas esse ęquales.

Propos. 15. Theore. 14.

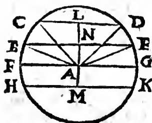
In circulo maxima est diameter, & cæterarum ea semper maior, quæ centro est propior.



Per centrum A ductâ diametro FG, ducatur Hk propior cẽtro quã CD, ad quas perpendicularibus è centro ductis AL, AM, ex AL, quæ [a] necessario maior erit, sumatur AN æqualis ipsi AM, & per N agatur BE ad rectos ipsi AL, iun- [a] 4. def. 3.

 gan-

ganturque rectæ AB, AC, AD, AE. Nunc vero quia BE HK æqualiter à centro distantes sunt ęquales, [b] & in b 14. 3.
triãgulo ABE duo latera [c] AB AE ęqua- c 20. 1,



lia diametro FG, maiora sunt quã BE; erit eadem diameter FG maior quam BE, vel HK, aut quæuis alia.

2. Rursus quia duo latera AB, AE, duobus lateribus AC, AD sunt paria, & angulus BAE maior ipso CAD, erit basis BE seu HK maior quam CD, quæ est à centro remotior. In circulo igitur &c.

Propo. 16. Theore. 15.

Quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos linea ducitur extra circulum cadit. Neque alia recta cadere potest in locũ inter ipsam rectã & peripheriam comprehensum. Et semicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

Ad

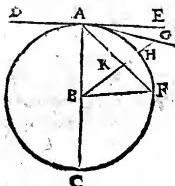
Ad punctum A extremũ diametri AC ductâ DE ipsi AC perpendiculari. Dico rectam DE extra circulum cadere. Si enim vis cadere intra, qualis esset DAF, ductâ ex centro rectâ BF, trianguli AFB cum duo latera BA BF paria sint, essent [a] etiam pares anguli BAF (quem vis esse rectum) & BFA, quod absurdum est; duo enim recti [b] in triangulo esse non possunt. Eandem ob causam AF in circumferetiam cadere nequit; nam etiam tum sequeretur in triangulo duos esse rectos. Recta ergo DA necessario extra circulum cadit. a 5. 1. b 17. 1.

2 Sed neque alia recta cadet intra rectam AE & ambitum FA. Si enim id putas de AG, ducatur ad eam è centro perpendicularis BG; & quia rectus est BGA, minor recto erit BAG: quare maior est BA [c] quam BG subtendens minorem recto. At hoc absurdum est; c 19.

 nam

nam BA ipsi BH parti totius BG ęqualis est, non ergo maior totâ BG.

3 Angulus semicirculi BAF quolibet acuto est maior: nam quiuis acutus cũ sit minor recto BAE, debebit constitui



per rectã, puta GA, quæ ad pũctum A ducta necessario cadit intra circulum. Minorem ergo angulum faciet quam sit angulus semicirculi BAF.

4 Angulus reliquus HAF, quem contingentiæ dicimus, minor est quouis rectilineo; nam si minor aliquis constitui posset puta GAE duceretur recta GA in locum inter rectam AE & peripheriam BF. Quæ igitur &c.

Corrollarium.

Hinc efficitur rectam ad extrmum diametri perpendicularem tangere circulum, & in vnico puncto tangere; nam si plura tangeret, caderet [a] *intra circulum.*

[a] 2.3.

Pro-

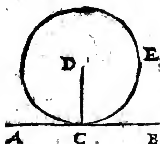
Propo. 17. Proble. 2.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum tangat.

Dato puncto A, & circulo BCD, ducatur ex centro E recta EA, & eodem cẽtro ſpatio EA circulus AFG; exciteturque ad D recta DF ad rectos ipſi EA. Inde iunctâ rectâ EF agatur quoque recta AB; quam eandem dico tangere circulum BCD in puncto B. Quia enim triangulorum ABE, FED, duo latera AE, EB duobus EF, ED ſunt paria, & angulus E communis, hæc triangula ſe habent iuxta 4.1. Quare cum angulus EDF rectus ſit, rectus quoque erit EBA, & proinde recta AB circulum *a* tangit in B. A dato ergo puncto &c. *a* 16. 3.

Propo. 18. Theore. 16.

Si circulum tangat recta linea, ducta altera è centro ad contactum ipsi tangenti erit perpendicularis.



Vt si recta AB circulum tangat in C recta altera DC, ex centro D, ad cōtactum C, ipsi AB erit perpendicularis. Si enim anguli ACD, DCB non

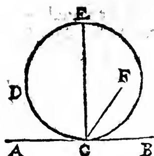
a 13. 1. sunt recti, erit eorum a alteruter acutus, puta ACD, sed hic maior est angulo semicirculi ECD, erit ergo angulus semicirculi minor aliquo b acuto,

b 16. 1. quod fieri nō potest. Anguli ergo ADC DCB sunt recti, ac proinde recta DC tangenti AB est perpendicularis.

Propo. 19. Theor. 17.

Si recta circulum tangat, & ad punctum contactus tangenti ipsi perpendicularis excitetur, in ea erit circuli centrū.

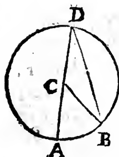
Recta AB tāgat in C circulū CDE, excitetur-



teturque ad tactū C, recta C E, ipsi AB perpendicularis, in qua si negas esse centrum circuli, sit ergo alibi, puta vbi F ducaturque F C quæ ipsi AB erit a perpendicularis, quare rectus angulus A C E recto angulo ACF erit æqualis, pars videlicet toti, quod est absurdum. Non ergo alibi erit centrum quam in recta CE.

Propo. 20. Theore. 18.

Ex eadem peripheriæ portione angulus ad cētrum, duplus est eius qui ad ambitum extenditur.



Super segmento A B, ad centrum C, fiat angulus ACB, & super eodem segmēto AB ad ambitum extēdatur angulus A D B. Quia ergo trianguli

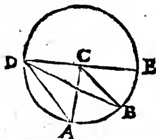
CBD

CDB latera CB, CD sunt æqualia; sunt [a] & anguli D, & CBD ad basim æquales: sed his duobus internis & oppositis[b] externus ACB est æqualis; idẽ igitur angulus externus ACB, qui est ad cẽtrũ, duplus est ipsius ADB, qui porrigitur ad ambitum. Ex eadem ergo &c.

[a] 5. 1.
[b] 32. 1.

Eadem demonstratio adhibebitur si triangula se intersecent. Vt angulus ACB ad cẽtrum, duplus est ipsius ADB qui ad ambitũ. Nam ductâ rectâ DCE erunt anguli CDA, CAD [c] æquales, & his duobus æqualis externus [d] & oppositus ACE, cuius anguli quia pars vna angulus BCE [e] duplus est anguli BDC, reliquus ACB duplus etiam erit reliqui A D B, quod erat probandum: est enim angulus A D B angulus ad ambitum, & ACB ad centrum, super eodem arcu AB.

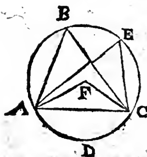
[c] 5. 1.
[d] 32. 1.
[e] 32. 1.



Prop.

Propositio 21. Theore. 19.

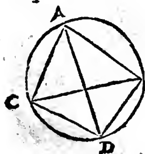
In circulo qui in eadem portione sunt anguli, æquales sunt.



Sit circulus AB CD, & in eius portione ABC sint anguli ABC AEC iuxta def. 11. ducaturq; ad centrũ angulus F. Quia ergo tam angulus a B quam E, eſt dimidium eiuſdem anguli F, ſequitur eos inter ſe eſſe pares. In circulo ergo &c. a 20. 3.

Propoſitio 22. Theore. 20.

Quadrilaterorum in circulo deſcriptorum anguli oppoſiti duobus rectis sũt æquales.



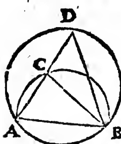
Deſcripto quadrilatero AB CD in circulo A B D ducãtur rectę AD BC. Tunc vero quia anguli CAD CBD in a eadem portione CABD, a 21. 3.

&

& similiter anguli DAB, DCB, in eadem portione BACD, sunt etiam pares; totus angulus CAB duobus DCB DBC æqualis est: sed hi duo addito angulo CDB fiunt [b] æquales duobus rectis (constituent enim triãgulũ CBD)
b 32. 1.
Idem igitur angulus CDB, adiunctus opposito CAB efficiet quoque angulos pares duobus rectis.

Propositio 23. Theore. 20.

Super eadem recta duæ circulorum portiones similes & inæquales ad easdem partes non constituentur.



Sint enim si fieri potest super AB segmenta similia & inæqualia ACB, ADB; ductisq; rectis AD, BC, BD, erunt anguli D, & ACB pares super eadẽ [a] portione AB. At externus ACB interiori & opposito [b] D par esse nequit. Super eadem ergo recta &c.

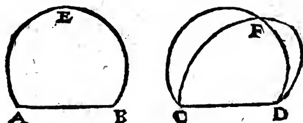
a 21. 3.
b 16. 1.



Prop.

Propositio 24. Theore. 22.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se sunt æqualia.

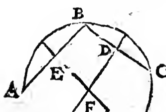


Super rectis ęqualibus AB, CD, constituta sint similia segmēta AEB, CFD, quæ si non sunt æqualia; collocetur AB recta super ipsam CD, cui cōgruet, cum ponatur æqualis. Quod si non cōgruerēt etiam segmenta, tunc vel vnum extra alterum totum caderet & sic similia & inæqualia segmenta super eadē CD constituerentur, vel vnum cadet partim extra; partim intra & tunc circulus circulum secaret in pluribus pūctis, quam duobus puta in C, F, D, si circuli perficerentur, quod vtrumuis *a* est absurdum. Super æqualibus ergo rectis &c. *a* 23. *&* 10. 3.

Pro.

Propo, 25. Proble. 3.

Data portione circuli describere circulũ cuius est portio.



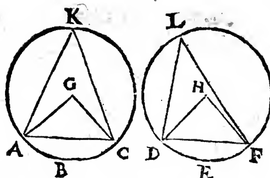
In data portione ABC sumantur vtcunq; tria puncta A, B, C; iungãturque duabus rectis AB, BC; quibus in D & E bisectis, ad ea puncta excitentur perpendiculares DF, EF, vbi enim se secabunt puta in F erit circuli centrum. Nam per 1.3. tam in recta DF, quam in altera EF, erit circuli centrũ. Non alibi ergo quã in F, alias duo essent vnius circuli centra. Centro ergo F, spatio FA describetur circulus cuius portio est ABC.

Propo. 26. Theore. 23.

Anguli æquales ad centra aut ad ambitum circulorom æqualium insistunt segmentis æqualibus.

Sint ęquales anguli AGC, DHF ad centra G & H, ducanturque rectę AC, DF. Quia ergo triangulorum AGC, DHF, duo latera GA, GC duobus HD

HF



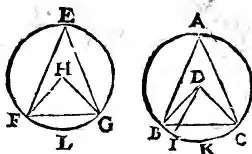
HF sunt paria, & anguli G & H ponūtur ęquales; erit [a] basis AC basi DF æqualis, quare & arcus ABC [b] arcni DEF erit æqualis. Rursus si anguli K & L sint æquales, erunt [c] portiones AkC, DLF similes: quare cum circuli toti ponantur æquales, similes quoque erunt arcus ABC DEF.

a 4. 1.
b 24. 1.
c 10 def. 3.

Propo. 27. Theore. 24.

Anguli ad centra aut ambitum æqualiū circulorum insistentes æqualibus circulorum portionibus, sunt aquales.

Si enim anguli BDC, FHG æqualiū circulorum, ęqualibus arcubus BKC, FLG insistunt, & anguli ipsi non sunt æquales; sit BDC maior, fiatque angulus



BDI ipsi FHG æqualis; equales ergo erunt arcus BI, FG, quod est a absurdum, cum arcus BC & FG positi sint æquales. Anguli ergo BDC, FHG inequales esse non possunt, ac proinde b nec anguli A & E qui sunt dimidij ipsorum D & H. Anguli ergo ad centra &c.

a 26. 3.

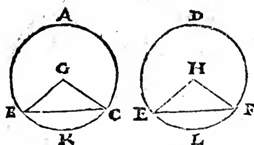
b 20. 3.

Propo. 28. Theore. 25.

In æqualibus circulis æquales rectæ auferunt & relinquunt æquales peripherias.

Nam si in paribus circulis ABC DEF rectæ BC, EF sunt æquales; factis angulis ad centra G & H, erunt triangulorũ GBC, HEF duo latera GB, GC duobus HE, HF æqualia, cumque basis BC basi BF sit etiam æqualis, equales erunt anguli a G & H. Similes ergo por-

a 8. 1.



portiones sunt BKC, ELF. Et quia circuli sunt æquales, similes quoque relinquentur BAC, EDF. In æqualibus ergo &c.

Propositio 29. Theore. 26.

In æqualibus circulis æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

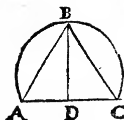
Nam in figuris superioribus si BKC, ELF, sumptæ sint portiones æquales, pares *a* erunt anguli G, & H: sed & latera continentia sunt æqualia, quare *b* bases BC, EF, quæ subtendunt æquales arcus inter se sunt ęquales. *a* 27. 3. *b* 4. 1.

Propo. 30. Proble. 4.

Datam circumferentiam secare bifariã.

Datę peripheriæ A B C, subtendatur recta AC, diuisa in D bifariam, ad quod pũctum excitetur D B, ipsi AC, perpen-

I dicu-

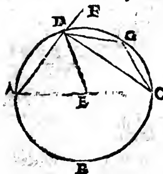


dicularis, eritq; peripheria A B C, bifariã in B, diuisa. Nam ductis rectis A B, B C quia triangulorum D A B D B C, latus DA ipsi D C, est æquale, & DB commune, anguliquead D recti sunt, erunt [a] bases AB, BC, æquales, ac proinde æquales [b] etiam peripheriæ AB, BC. Secta est igitur A B C, bifariam in B; quod erat faciendum.

a 4. 1.
b 28. 3.

Proposi. 31. Theore. 27.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est: qui in portione maiore, minor; & qui in minore, maior recto: insuper maioris portionis angulus est maior recto; minoris, minor.



In semicirculo ADC, fiat vtcũq; angulus C D A, quem dico esse rectum. Nam ex E cẽtro ductâ rectâ ED, & latere AD, producto in F, quia

quia trianguli E A D, duo latera E A, ED sunt paria, pares quoque erunt anguli a EAD, EDA, & in triangulo ECD, pares erunt ob eandem causam anguli EDC, ECD; totus ergo angulus ADC, duobus DAC, DCA, æqualis est; sed ijsdem duobus oppositis & internis æqualis est b externus F D C, Sunt ergo æquales quoque inter se anguli A D C, CDF; ac proinde rectus vterque. a 5. 1. b 32. 1.

Et quia in triangulo ACD, angulus ADC, ostensus est rectus, minor c recto erit angulus BAC, qui est in portione DABC, maiore quam sit semicirculus. c 17. 1.

Nunc vero sumpto vtcunque puncto G, in arcu DC, ductisque rectis DG, GC, quia quadrilaterum est AG, anguli oppositi d D A C, C G D, valent duos rectos: sed angulus D A E minor recto est, recto ergo maior est angulus D G C, qui est in portione DGC minore quam semicirculus. d 22. 3.

Sed & angulus maioris portionis qui continetur recta CD, & circumferentia DABC maior est recto ADC, totum videlicet sua parte. Angulus denique minoris portionis qui contine-

tur recta CD, & arcu DGC, minor est quam rectus C D F, pars videlicet quã totum. In circulo igitur &c.

Corollarium.

Si in triangulo angulus aliquis duobus reliquis sit aequalis is erit rectus. Ut si angulus ABC duobus A & C, aequalis est, cum externus a *DBC, eiusdem A & C sit equalis; aequales etiam erunt DBC, & ABC, ideoque recti.*

a 32. 1.

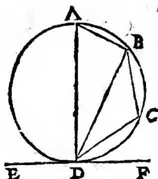


Propo. 32. Theore. 28.

Si circulum recta tetigerit, & à tactu ducatur recta altera secans circulum, anguli quos ad tãgentem facit, aequales erunt ijs qui in alternis circuli portionibus consistunt.

Circulum ABCD, tangat recta EF, in puncto D, ex quo ducatur DB, vtcunque circulum secans in B, deinde excitata DA, ipsi EF, perpendiculari (quae erit a diameter) ducatur AB, sũptoque quouis puncto in arcu BD, puta G, du-

a 18. 3.

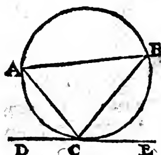


C, ducantur etiam rectę BC, CD. Quo facto dico angulos quos facit BD, cum tangente EF, æquales esse angulis, qui sunt in alternis circuli portionibus. Hoc est angulum BDF, parem esse ipsi BAD, qui est in portione ABD; & angulum BDE, parem esse ipsi BCD, qui in portione DCB cōsistit. Nam quia angulus ABD, in semicirculo b rectus est, reliqui duo BAD, BDA, vni recto c sunt pares; sed rectus est angulus ADF, valet ergo duos angulos BAD, BDA; ablato ergo communi BDA, reliqui BDF, & BAD, manent æquales. Amplius quia AC quadrilaterum est, anguli A, & C, sunt d pares duobus rectis, sicut & anguli BDF, BDE; cum igitur angulus BDF, ipsi A, sit ostensus æqualis, reliqui BDE, BCD, inter se relinquuntur ęquales; Si igitur circulum &c.

b 31. 3.
c 32. 1.
d 22. 3.

Propositio 34. Proble. 6.

A dato circulo portionem auferre quæ angulum capiat parem angulo dato.



Sit datus angulus F, & circulus ABC, cui ad quodvis punctū puta C, ap-

a 16. 3. plicetur a tangens DE, fiatque angulus BCE, ipsi F, æqualis: eritque angulus

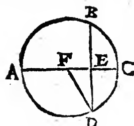
b 32. 3. quiuis in portione CAB, puta BAC, b æqualis ipsi BCE, seu dato angulo F, cum angulus CAB, in alterna circuli sectione consistat.

Propositio 35. Theore. 29.

Si in circulo duæ rectæ se interſecent, rectangulum ſub ſegmentis vnius æquale erit rectangulo ſub ſegmentis alterius contento.

In circulo ABCD, rectæ AC, BD, ſe interſecent in E; quæ ſectio ſi ſit in centro, tunc cum omnia ſegmenta ſint æ-

qualia

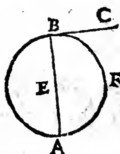


qualia, erit rectangulum ſub ſegmentis vnius, æquale rectangulo ſub ſegmentis alterius. Quod ſi in alterutra tãtum puta AC, ſit centrum circuli, ſecetque a alteram BD, æqualiter & ad rectos in E, tunc ductâ rectâ FD ex centro F, quia recta AC, bifariam in F, & non bifariam in E diuiſa eſt, erit rectangulum b ſub AE, EC, ſimul cum quadrato ipſius EF, æquale quadrato ipſius FC vel FD ſeu duobus ex c FE, ED; ſed quadratum ipſius ED, eſt rectangulum ſub partibus rectę BD, ſectæ æqualiter in E; Igitur rectangulum ſub partibus EC, EB addito quadrato ex EF, æquale eſt quadrato ipſius FD, ſicut & rectangulum ſub partibus inæqualibus ipſius AC, adiuncto eodem quadrato ex EF, fiebat æquale qnadrato ipſius FD; Ablato ergo communi quadrato ex EF rectan-

a 3. 3.
b 5. 2.
c 47. 1.

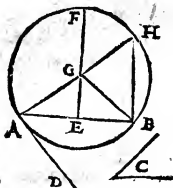
Propo. 33. Proble. 5.

Super data recta portionem circuli describere quæ capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Si angulus datus ſit rectus vt D, & data recta ſit A B, eâ diuiſâ bifariam in E; centro E ſpatio E B, ducetur ſemicirculus A F B, capiens* angulum rectum.

*31. 3.



Si vero angulus datus ſit acutus, vt C, & data recta AB; applicetur ad eius extremũ A, angulus D AB, ipſi C æqualis; deinde rectâ AB, diuiſâ bifariam in E, excitetur EF, ad rectos ipſi AB, & ad A, recta A H, ad rectos ipſi A D, iungaturque GB, eruntque triangulorũ EAG, EBG, latera

latera EA, EB, æqualia, & EG, commune, angulique contenti, æquales, æqualis ergo erit [b] basis GA, basi GB, quare si centro G, spatio GA, ducatur circulus, transibit per extremum B; nunc vero ductâ rectâ HB, quia diametro A H, ad extremum A, ducta est ad rectos lineas DA, tanget [c] hæc linea circulum; & quia à contactu ductâ rectâ AB; circulum secat, erit angulus DAB, seu angulus datus C, æqualis [d] angulo AHB, qui est in alterna sectione AFB, hæc ipsa igitur sectio HFB, super data AB, capit angulum dato angulo æqualem.

b 4. 1.

c 16. 3.

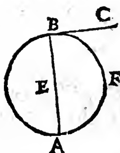
d 23. 3.

H B D A C G E I F

Similis erit structura si detur angulus obtusus C, & similis item demõstratio, capiet enim arcus A H B, angulum obtusum BHA, ipsi GAI, hoc est dato angulo C, æqualem. Super data ergo &c.

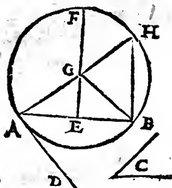
Propo. 33. Proble. 5.

Super data recta portionem circuli describere quæ capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Si angulus datus sit rectus vt D, & data recta sit A B, eâ diuisâ bifariam in E; centro E spatio E B, ducetur semicirculus A F B, capiens* angulum rectum.

* 31. 3.



Si vero angulus datus sit acutus, vt C, & data recta AB; applicetur ad eius extremũ A, angulus D AB, ipsi C æqualis; deinde rectâ AB, diuisâ bifariam in E, excitetur EF, ad rectos ipsi AB, & ad A, recta A H, ad rectos ipsi A D, iungaturque GB, eruntque triangulorũ EAG, EBG,

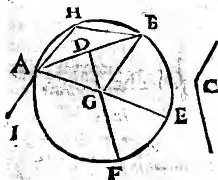
latera

latera EA, EB, æqualia, & EG, commune, angulique contenti, æquales, ęqualis ergo erit [b] basis GA, basi GB, quare si centro G, spatio GA, ducatur circulus, transibit per extremum B; nunc vero ductâ rectâ HB, quia diametro AH, ad extremum A, ducta est ad rectos linea DA, tanget [c] hæc linea circulum; & quia à contactu ductâ rectâ AB; circulum secat, erit angulus DAB, seu angulus datus C, æqualis [d] angulo AHB, qui est in alterna sectione AFB, hæc ipsa igitur sectio HFB, super data AB, capit angulum dato angulo ęqualem.

b 4. 1.

c 16. 3.

d 23. 3.

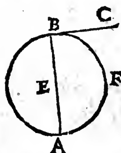


Similis erit structura si detur angulus obtusus C, & similis item demõstratio, capiet enim arcus AHB, angulum obtnsum BHA, ipsi GAI, hoc est dato angulo C, ęqualem. Super data ergo &c.

I 4 Prop.

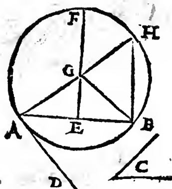
Propo. 33. Proble. 5.

Super data recta portionem circuli describere quæ capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Si angulus datus sit rectus vt D, & data recta sit A B, eâ diuisâ bifariam in E; centro E spatio E B, ducetur semicirculus A F B, capiens a angulum rectum.

a 31. 3.



Si vero angulus datus sit acutus, vt C, & data recta AB; applicetur ad eius extremũ A, angulus D AB, ipsi C æqualis; deinde rectâ AB, diuisâ bifariam in E, excitetur EF, ad rectos ipsi AB, & ad A, recta A H, ad rectos ipsi A D, iungaturque GB, eruntque triangulorũ EAG, EBG,

latera

latera EA, EB, æqualia, & EG, commune, angulique contenti, æquales, ęqualis ergo erit [b] basis GA, basi GB, quare si centro G, spatio GA, ducatur circulus, transibit per extremum B; nunc vero ductâ rectâ HB, quia diametro AH, ad extremum A, ducta est ad rectos linea DA, tanget [c] hæc linea circulum; & quia à contactu ductâ rectâ AB; circulum secat, erit angulus DAB, seu angulus datus C, æqualis [d] angulo AHB, qui est in alterna sectione AFB, hæc ipsa igitur sectio HFB, super data AB, capit angulum dato angulo ęqualem.

b 4. 1.

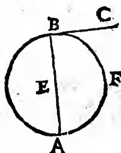
c 16. 3.

d 23. 3.

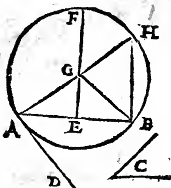
Similis erit structura si detur angulus obtusus C, & similis item demõstratio, capiet enim arcus AHB, angulum obtusum BHA, ipsi GAI, hoc est dato angulo C, ęqualem. Super data ergo &c.

Propo. 33. Proble. 5.

Super data recta portionem circuli describere quæ capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Si angulus datus sit rectus vt D, & data recta sit A B, eâ diuisâ bifariam in E; centro E spatio E B, ducetur semicirculus A F B, capiens *an-
a 31. 3. gulum rectum.



Si vero angulus datus sit acutus, vt C, & data recta AB; applicetur ad eius extremũ A, angulus D AB, ipsi C æqualis; deinde rectâ AB, diuisâ bifariam in E, excitetur EF, ad rectos ipsi AB, & ad A, recta A H, ad rectos ipsi A D, iungaturque GB, eruntque triangulorũ EAG, EBG, latera

latera EA, EB, æqualia, & EG, commune, angulique contenti, æquales, æqualis ergo erit [b] basis GA, basi GB, quare si centro G, spatio GA, ducatur circulus, transibit per extremum B; nunc vero ductâ rectâ HB, quia diametro AH, ad extremum A, ducta est ad rectos linea DA, tanget [c] hæc linea circulum; & quia à contactu ductâ rectâ AB; circulum secat, erit angulus DAB, seu angulus datus C, æqualis [d] angulo AHB, qui est in alterna sectione AFB, hæc ipsa igitur sectio HFB, super data AB, capit angulum dato angulo æqualem.

b 4. 1.

c 16. 3.

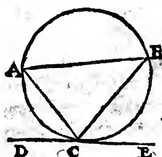
d 23. 3.

H B D A G C E I F

Similis erit structura si detur angulus obtusus C, & similis item demõstratio, capiet enim arcus AHB, angulum obtusum BHA, ipsi GAI, hoc est dato angulo C, æqualem. Super data ergo &c.

Propositio 34. Proble. 6.

A dato circulo portionem auferre quæ angulum capiat parem angulo dato.

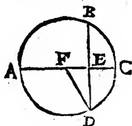


Sit datus angulus F, & circulus ABC, cui ad quodquis punctū puta C, ap-
a 16. 3. plicetur a tangens DE, fiatque angulus BCE, ipsi F, æqualis: eritque angulus
b 32. 3. quiuis in portione CAB, puta BAC, b æqualis ipsi BCE, seu dato angulo F, cum angulus CAB, in alterna circuli sectione consistat.

Propositio 35. Theore. 29.

Si in circulo duæ rectæ se intersecent, rectangulum sub segmentis vnius æquale erit rectangulo sub segmentis alterius contento.

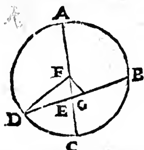
In circulo ABCD, rectæ AC, BD, se intersecent in E; quæ sectio si sit in centro, tunc cum omnia segmenta sint æqualia



qualia, erit rectangulum sub segmentis vnius, æquale rectangulo sub segmentis alterius. Quod si in alterutra tãtum puta AC, sit centrum circuli, seceture[a] alteram BD, æqualiter & ad rectos in E, tunc ductâ rectâ FD ex centro F, quia recta AC, bifariam in F, & non bifariam in E diuisa est, erit rectangulum[b] sub AE, EC, simul cum quadrato ipsius EF, æquale quadrato ipsius FC vel FD seu duobus ex[c] FE, ED; sed quadratum ipsius ED, est rectangulum sub partibus rectę BD, sectæ æqualiter in E; Igitur rectangulum sub partibus EC, EB addito quadrato ex EF, æquale est quadrato ipsius FD, sicut & rectangulum sub partibus inæqualibus ipsius AC, adiuncto eodem quadrato ex EF, fiebat æquale quadrato ipsius FD; Ablato ergo communi quadrato ex EF rectan-

a 3. 3.
b 5. 2.
c 47. 1.

ctangula sub AE,EC,& sub BE,ED,remanent æqualia.



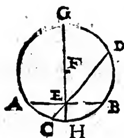
Si vero in alterutra recta puta AC,sit centrũ circuli F,& vtraque linea inæqualiter in F diuidatur, ductis F D, & perpendiculari F G, rectangulum snb partibus AF, EC,cum quadrato ipsius EF,par erit quadrato *d* ex FC, vel FD; Similiter rectangulum sub BE,

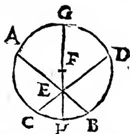
d 5. 2.

FD, cum quadrato ipsius EG, æqualia sunt quadrato ex G D, & hoc cum quadrato ipsius GF, æquale est quadrato ipsius DF, quare additis ad rectangulũ sub DE EB quadratis ipsarum EG, GF, seu quadrato *e* ipsius EF fiet rectangulum sub DE, EB æquale quadrato ex D F,cui etiam æquale erat *f* rectangulum sub partibus ipsius AC, adiũcto quadrato ex EF; hoc ergo quadrato ex EF communi ablato, rectangula sub AE, EC,& BE, ED, manent æqualia.

e 47. 1.
f 5. 2.

Denique si neutra per centrum transeat & vna ex illis bifariam secetur, aut neu-



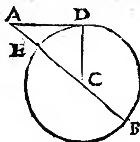


ieutra: ducatur per centrum F,& ſe-
tionem E recta GH, tunc vero quia
ſtenſum eſt rectangulum ſub AE, EB,
quale eſſe rectangulo ſub GE, EH (ſi-
e AB,diuiſa ſit bifariam ſiue nō) item
ectangulum ſub C E, E D, æquale eſſe
idem ſub GE, EH,(ſiue CD,bifariam
ecta ſit ſiue non) erit rectangulum ſub
E EB,æquale rectangulo ſub CE,ED.
Quod erat demonſtrandum. Si ergo in
irculo &c.

Propo.*36*. Theore. *30*.

i à puncto extra circulũ ducantur duæ rectæ, ſecans vna,altera tangens circulum ; rectangulum ſub tota ſecante & parte quæ eidem adiecta eſt vſque ad punctum, æquale erit quadrato tangentis.

A pun-



Ex puncto A ducatur A B, circulũ secans, quæ primo trãseat per C, centrum, agaturque [a] insuper recta AD, circulum tangens in D, adiunctâ rectâ CD, quæ erit [b] ad rectos ipsi AD. Quia ergo recta BE, bifariam secta est in C, & ei adiuncta est EA, erit rectangulum [c] sub AE, EB cum quadrato ipsius EC, vel CD, ęquale quadrato ex A C: sed hoc idem quadratnm ex AC valet duo simnl [d] quadrata ex AD, CD; si igitur auferas qnadratum commune ex D C, rectangulum sub AE, EB, fit æquale quadrato tangentis AD.

a 17. 3.
b 18. 3.
c 6. 2.
d 47. 1.

Quod si linea AB, non transeat per C centrum, ducatur ad eam CF perpendicularis, item alię rectæ CD, CE, CA. Cum igitur rectangulum sub AE, EB, addito quadrato ipsius EF, par sit [e] quadrato ex AF, addito cõmuni quadrato ex F C, quadrata ex AF, F C, seu [f] quadratum ex AC, ęquale erit rectangulo sub AE, EB, adiectis quadratis ex EF, FC,

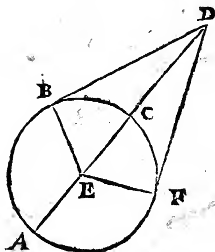
e 6. 2.
f 47. 1.

EF, FC, vel cũ quadrato ipsius EC. Quia ergo rectangulum sub AE, EB cum quadrato ipsius CE; vel CD, æquiualet quadrato ipsius AC, vel duarum g AD DC; si auferatur commune ex DC, vel CE, rectangulum sub AE, EB, manebit æquale quadrato ipsius AD, Quod erat demonstrandum. Si ergo à puncto &c. g 47. 1.

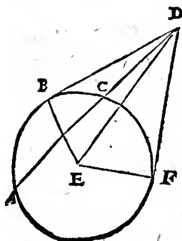
Propo. 37. Theore. 31.

Si à puncto extra circulum ducantur rectæ duæ, quarum altera secet, altera in circulum incidat, sitque rectangulum sub secante, & adiecta parte vsque ad punctum, æquale incidentis quadrato; recta illa incidens circulum tangit.

Ex puncto D extra circulum ABF ducatur recta DA, secans circulum in C, sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico rectam DB tange-



tangere circulum. Nam ductâ rectâ DF
a 17. 3. tangente a circulum in F iungantur è
centro E rectæ EB EF, & si recta DA nõ
transit per centrum E, addatur etiam
DE. Nunc vero quia rectangulo sub
b 36. 3. DA DC, equale est b qnadratum tangentis DF, eidemque rectangulo sub
DA DC ponitnr equale quadratum ipsius D B, erunt quadrata rectarum DF
DB æqualia, ideoque & ipsæ equales,
Quia ergo triangulorum DFE, DBE,
duo latera DF, FE, duobus DB, BE, sunt
æqualia, & basis D E communis; erũt
c angu-



c anguli DFE, DBE æquales; eſt autem d angulus DFE rectus, rectus ergo etiam eſt DBE, ideoque e recta DB circulum tangit. Si ergo extra circulum &c. c 8. 3. d 18. 3. e 16. 3.



EVCLI-

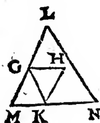


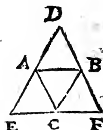
EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER IIII.

Definitiones.

1 Figura rectilinea in altera rectilinea dicitur inſcribi, cum ſinguli eius quæ inſcribitur anguli ſingula latera attingunt eius in qua dicitur inſcribi.



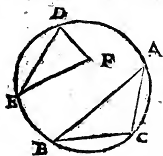


Vt triangulum ABC, inſcriptum eſt in triangulo DEF: at triangulum GHK, non inſcribitur in triangulo LMN, quia angulus H, non attingit latus MN.

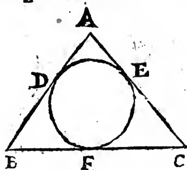
2 Figura

Figura circum figuram describi licitur cum singula eius quæ circumcribitur latera singulos angulos tetigerint figuræ, quę intus est descripta.

Vt in superioribus exemplis triangulum DEF; est descriptum circa triangulum ABC, at triangulum LMN, non est descriptum circa GHK.



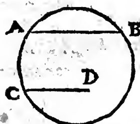
3 Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur cum singuli eius anguli circulũ tetigerint. *Vt triãgulum ABC, circulo ADB est inscriptũ, non autem triangulum DEF.*



4 Figura vero rectilinea circa circulũ describi dicitur, cũ singula eius latera ambitum circuli tangunt. *Vt triangulum ABC, descriptum est circa circulum DEF.*

5 Similiter & circulus in figura rectilinea inscriptus est, cum eius ambitus tangit singula latera figurę in qua circulus describi dicitur. *Vt circulus DEF, inscriptus est in triangulo ABC def. 4.*

6 Circulus autem circa figuram describi dicitur, cum circuli ambitus tangit angulos omnes eius figuræ quam circumscribit. *Vt in figura definitionis tertiæ circulus ACBD, descriptus est circa triangulum ABC, non autem circa DEF.*



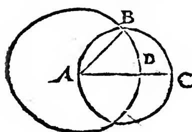
7 Recta linea in circulo accõmodari vel aptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint. *Vt linea AB, aptata est in circulo ABC, non autem CD.*

Propositiones.

Propositio 1. Proble. 1.

In dato circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro maior non sit.

In

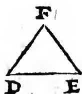


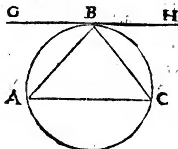
In circulo A B C aptanda ſit linea æqualis ipſi E quæ diametro A C maior non ſit nã maior diametro a nulla aptari poteſt. Quod ſi diametro A C eſſet ęqualis linea E, ipſa diameter A C eſſet accommodata vt petitur. Si ergo linea E minor ſit diametro A C, abſcindatur æqualis A D, ac centro A ſpatio A D ducatur circulus B D; iuncta enim recta A B aptata erit in circulo A B C, & erit ęqualis ipſi E, cum E ſit ęqualis ipſi A D, cui æqualis etiam eſt eſt A B. a 15. 3.

Propoſitio 2. Proble. 2.

In dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

Sit datus circulus A B C, & triangulum D E F. Ducta a tangente G H ad pũctum B fiat angulus b H B C æqualis ipſi D, & G B A ipſi E ponatur æqualis, ducaturque recta A C, & triangulum a 16. 3. b 25. 1.



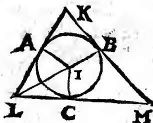


ABC erit quod petitur: nam quia angulus HBC æqualis est ipsi A in alterna *c* sectione, & eadem de causa GBA ipsi C; erit quoque angulus D, ipsi A, & angulus E ipsi C æqualis; quare & tertius F ipsi angulo B æqualis erit. In dato ergo circulo &c.

c 32. 3.

Propo. 3. Proble. 3.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.





Sit datus circulus A B C, & triangulum DEF, productoque latere EF in G & H

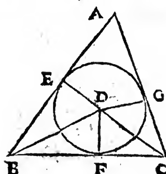
k H, angulo DEG ęqualis fiat *a* ad centrum angulus AIC, & angulus BIC angulo DFH; necnon ad singula puncta A, B, C, ducantur *b* tangentes KL, LM, MK: eritque triangulum KLM dato triangulo DEF æquiangulum. Nam quia in quadrilatero AICL anguli ad A & C *c* sunt recti reliqui L & AIC duobus rectis sunt pares: si enim ducatur LI, duo triangula ALI, CLI habent angulos pares *d* quatuor rectis; cũ igitur duo recti sint ad A & C, reliqui continebunt rectos alios duos. Si ergo anguli ALC, AIC, valẽt duos rectos, cum angulus AIC sit æqualis ipsi DEG, alter angulus L par erit angulo DEF, quandoquidem anguli circa latus DE sint *e* duobus rectis ęquales. Eodem modo per quadrilaterum BICM ostendetur angulum M esse ipsi DFE ęqualem. Quare & tertius D, tertio angulo K erit æqualis. Circa datum ergo &c.

a 23. 1.
b 16. 3.
c 18. 3.
d 32. 1.
e 15. 1.



Propo. 4. Proble. 4.

In dato triangulo circulum describere.



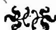
Dati trianguli A B C duo quiuis ãguli C B A, A C B bisecentur[a] per rectas D B, D C, occurrentes in D, à quo pũcto ducãtur[b] D E, D F, D G, singulæ singulis lateribus triãguli dati perpendiculares. Nunc verò quia triangula D B F, D B E, habent singula ad E, & F, vnum angulum rectum, & alterum D B F,[c] alteri D B E æqualem, latus insuper D B commune; erunt[d] etiam latera D E, D F ęqualia; similiterque ostendetur rectam D G, rectæ D F ęqualem esse. Si igitur centro D, spatio D F, ducatur circulus F E G, transibit per puncta E & G, tangetque latera omnia trianguli dati A B C. In dato ergo triangulo &c.

a 9. 1.

b 12. 1.

c. conſt.

d 26. 1.

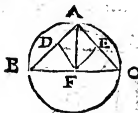


Pro-

Propositio 5. Proble. 5.

Circa datum triangulum cirmlum deſcribere.







Trianguli dati ABC duo latera A B, A C, diuidantur bifariam in D & E; ad quę puncta excitatis perpendicularibus coibunt illæ, vel intra triangulum, vel in latere ipſo, vel extra, vt in figuris ordine apparet. Ducantur inſuper rectæ AF, BF, CF, ſi omnes, aut aliquæ earum ante non ſunt ductæ. Quia ergo triangulorum A D F, B D F, latera DA DB ſunt æqualia, & DF commune, angulique recti ad D; erit a baſis AF ipſi FB æqualis, pariterque oſtendetur FC ipſi FA eſſe æqualem. Centro ergo F, ſpatio FA ducetur circulus ACB, qui tranſibit per puncta a 4. 1.

 C & B.

C & B. Circa datum ergo triangulum &c.

Propo. 6. Proble. 6.

In dato circulo quadratum describere.



In dato circulo ABCD, secẽt se ad rectos in centro E diametri A D, B C, ducanturque rectæ AC, AB, CD, DB: ostẽdetur ergo omnes has lineas esse equales bases triangulorum suorũ per 4. 1 & sunt anguli supra illas bases, puta super AB, æquales, quia æqualia sunt latera EA, EB: cum ergo omnes anguli ad E sint recti, omnes qui sunt supra bases erunt semirecti, totus ergo angulus ABD, & similes, sũt recti: figura ergo rectilinea ABCD, quadratũ est, descriptum in circulo; quod erat faciendum.

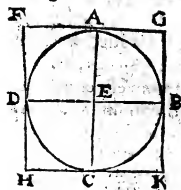


Pro-

Propositio 22. Proble. 20.

Circa datum circulum quadratum describere.

Ductis diametris se secãtibus ad rectos in E centro, per earum extrema A, B, C, D, ducantur [a] tangentes FG & similes, eritque figura rectilinea FG HK; in qua rectilineum Ak est parallelogrammum, sunt enim [b] anguli ad A & C recti, ergo latera [c] AG, Ck parallela; similiterque parallelę sunt A C, G k propter angulos ad B & E rectos. Cum ergo angulus A Ck rectus sit, erit etiam [d] oppositus A G k rectus: similiterque ostẽdetur angulos ad F, H, k, rectos esse. Item G k æquale est opposito A C, [e] diametro circuli, & omnia alia latera figuræ FK ostendentur diametro circuli æqualia. Sunt ergo omnes anguli recti & latera ęqualia in figura Fk, & per consequens



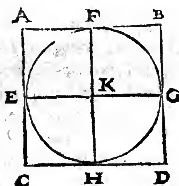
a 16 3.
b 18. 3.
c 28. 1.
d 34. 1.
e 33.

est

est quadratum. Circa datum ergo circulum. &c.

Propo. 8. Proble. 8.

In dato quadrato circulum describere.



Dati quadrati A D lateribus AB, AC, bifariam sectis in E & F, per E recta EG parallela ipsi A B, & per F ducatur FH ipsi AC similiter parallela; eruntque a lateribus quadrati & inter se ęquales. Et quia Ak parallelogrammum est, erunt latera opposita FK AE dimidium lateris b quadrati, ęqualia: similiterque ostendetur omnes rectas kE, kF, KG, KH, æquales esse dimidio lateris quadrati, & inter se. Centro ergo k, spatio KE ducetur circulus EF GH tangens omnia latera quadrati. In dato ergo quadrato &c.

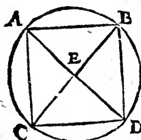
a 33. 1.

b 34. 1.

Pro-

Propositio .9 Proble. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.



In dato quadrato ABCD, ductis diametris se secantibus in E, quia trianguli ABC latera AB, AC sunt æqualia, erunt a anguli ACB ABC æquales, & semirecti, cum angulus CAB rectus sit: similiterque ostendetur omnes angulos geminos ad A, B, C, D, esse æquales; quare latera c EA EB &c. inter se esse æqualia. Centro ergo E, spatio EA, ducetur circulus ABCD, transiens per omnia puncta extrema quadrati. Circa datum igitur quadratum &c.

a 5. 1.

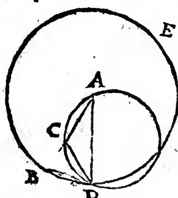
c 6. 1.

Propo. 10. Proble. 10.

Triangulum Isosceles constituere in quo vterque angulus ad basim sit duplum reliqui.

Recta AB secetur in C iuxta 11. 2. ita vt rectangulum sub AB BC sit equale qua-

quadrato rectæ. Deinde facto centro A, spatio AB ducatur circulus B D E,

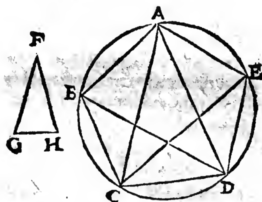


a 1. 4. in quo aptetur a recta BD ipsi A C æqualis, iūctis insuper rectis AD, C D; eritq; triā-gulum A B D æquicrurum.
b 6. 1. Quare b & anguli supra basim BD sunt æquales. Nunc vero hosce angulos singulos esse duplum tertii anguli A, sic ostendo. Circa triangulum
c 5. 4. ACD ducto c circulo DCA, quia rectā-
d 11. 2. gulum sub AB, BC æquale est d quadrato ex CA seu BD per constructionē, & AC circulum secat, ipsa BD tangit
e 37. 3. e circulum D C A, quare angulus CDB
f 32. 3. çqualis est f ipsi A in alterno segmento; & communi CDA addito, duo anguli A & CDA çquales sunt duobus BDC & CDA, hoc est toti ADB vel ABD. Et quia angulus externus BCD duobus
g 32. 1. g internis A & ADC æqualis est, erit idem BCD par ipsi CBD, vel ADB; & proin-

proinde *h* rectæ DC, DB æquales, cum *h* 6. 1.
pares angulos ſubtendant. Et quia BD
poſita eſt ipſi CA æqualis, pares erunt
rectę C D, C A. Quare *k* anguli A &
CDA æquales. Duplus ergo eſt angu- *k* 5. 1.
lus externus BCD ipſius A, & eiuſdem
dupli quoque anguli ſunt CBD, ADB,
qui ipſi externo BCD pares oſtenſi
ſunt. Triangulum ergo Iſoſceles &c.

Propoſi. 11. Proble. 11.

In dato circulo Pentagonum æquilaterū & æquiangulum deſcribere.



Aſſumpto triangulo *a* Iſoſcele FGH, *a* 10. 4.
cuius anguli G & H dupli ſint ipſius F,
in circulo ABCD *b* fiat illi æquiangulū *b* 2. 4.
ACD,

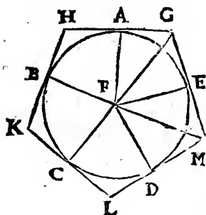
ACD, bifariamque diuidantur anguli
c 9. 1. c ACD, ADC. Iunctis deinde rectis AB, BC, CD, DE, EA factum erit quod proponitur. Nam quia anguli ADB, BDC
d 26. 3. sunt pares, pares etiam erunt d arcus AB, & BC; & eandem ob causam omnes reliqui arcus sunt ęquales, & omnes
e 29. 3. nes e rectæ AB, BC, &c, æquales, quæ pares arcus subtendunt. Sed & angulus
f 27. 3. ABC, f angulo BCD & reliquis quatuor similibus est æqualis, eo quod in æqualibus segmentis sint omnes. In dato ergo circulo &c.

Propo. 12. Proble. 12.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum describere.

In dato circulo ABC notentur quinque puncta A, B, C, D, E, signantia quinque angulos pentagoni æquilateri in
a 11. 4. circulo a descripti, ad quæ puncta ex centro F ducantur totidem rectæ FA FB &c. rursusque ad earum extrema
b ax. 11. ducantur tangentes quę concurrēt b in angulis G, H, K &c. factumque erit quod petitur. Nam quia in quadrilatero

ro BFCk, quatuor anguli quatuor *c* re- *c* 32. 1.
ctis æquiualent, similiterque in quadrilatero CFDL, & anguli ad B & C recti sunt, sequitur angulos BKC BFC duobus rectis æquiualere: similiterque angulos CLD CFD: cumque BFC & CFD sint anguli æquales *d* ob pares ar- *d* 27. 3.
cus BC, CD, reliqui BKC & CLD erũt æquales; pariq; methodo ostendetur angulos reliquos pentagoni inter se esse æquales. Nunc vero esse æquilaterum sic ostendo. Ductis rectis FG, FM erit quadratum ex FG *e* e- *e* 47. 1.
quale quadratis tam ipsarum AF, AG, quam ipsarum EF EG, Quare ablatis quadratis ęqualium AF, EF, quadrata reliquarum AG GE manent ęqualia, ac proinde rectæ AG GE sunt pares. Cumque anguli FAG, FEG & continentia latera sint æqualia, erunt



trian-

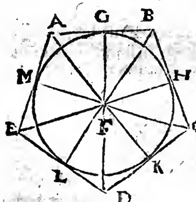
triangula AFG GFE iuxta 4. 1. & idcirco anguli AFG, GFE æquales. Eadem methodo oſtendetur triangula FEM, MFD eſſe iuxta 4. 1. ac proinde angulos EFM MFD eſſe æquales. Quare anguli, EFG, cũ ſint dimidij ęqualiũ EFM, erunt inter ſe pares. Quia ergo in triangulis GFE, EFM, duo anguli circa rectam EF ſunt pares, & latus adiacens
b 26. 1. EF commune eſt, reliqua latera b & anguli erunt ęqualia. Æquales ſunt ergo rectę GE, & EM, dimidiæ ipſius GM. Eodem modo oſtendetur AG eſſe dimidiam ipſius GH. Cumque dimidię GA GE oſtenſę ſint ęquales erunt & tota ta latera pentagoni GH, GM æqualia, ſimiliterque de cæteris procedet demõſtratio. Ergo &c.

Propoſ. 13. Proble. 13

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

Dati pentagoni ABCDE, anguli duo proximi EAB, ABC biſecentur a per rectas AF, BF, & à puncto F, in quo cõcurrunt, ducantur etiam rectæ FC & ceteræ

cæteræ ad reliquos angulos. Quia ergo triangulorum ABF, FBC duo latera BA, BC equalia sunt, & BF commune, angulique contenti ad B sunt pares; erit [b] totum toti æquale triangulum; anguli- 4. 1.
que & latera correspondentia æqualia: pares ergo sunt anguli B A F, B C F. Cumque anguli BAE BCD ponantur equales, sicut BAF est dimidium totius anguli BAE, ita BCF dimidium erit totius BCD. Hic ergo angulus, & reliqui in orbem, secti sunt bifariam. Ducantur deinde FG FH &c. singulæ singulis lateribus perpendiculares. Et quia triangulorum GFB, BFH duo anguli FGB, GBF duobus FHB, FBH sunt pares, &



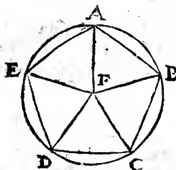
latus FB commune, æqualia [c] etiam erũt latera FG, FH, & his pari modo æquales erunt Fk FL, FM. Quare centro F spatio FG ductus circulus transibit er puncta H, K, L, M, & sic in penta- c 26. 1.

L gono

gono circulus erit descriptus.

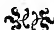
Propo. 14. Probl. 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.



Dati pentagoni ABCDE, angulis ABC BCD sectis bifariam per rectas FB, FC, in F conuenientes, triangulorum ABF BFC duo latera BA, BF duobus BC, BF æqualia erunt; & anguli ad B contenti æquales. Basis *a* ergo AF basi F C æqualis est; ostendeturque vt in sup. prop. reliquas FD FE diuidere bifariam angulos reliquos, & omnes esse lineas inter se æquales. Centro ergo F, spatio FB ductus circulus transibit per reliqua puncta C, D, E. Circa datum ergo &c.

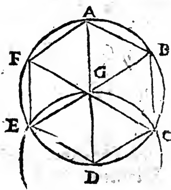
a 4. 1.



Pro-

Propo, 15. Proble. 15.

In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.



In dato circulo ABCD, cuius centrum G, ducta diametro AD centro D, ſpatio DG ducatur circulus E G C, ſecans priorem in punctis E & C, ductiſque per centrum G ad ambitum rectis CF, EB, iungantur rectæ DE, DC &c. eritque triangulum EGD æquilaterum; quare eius omnes anguli *a* erunt *a 5. 1.*
inter ſe pares, & quilibet erit pars tertia
b duorum rectorum, cui per omnia *b 32. 1.*
æquale eſt triangulum DGC. Iam vero
quia recta EG cadens *c* in rectam FC fa- *c 13. 1.*
cit æquales duobus rectis, cum anguli EGD, DGC, ſint duę tertiæ duorum rectorum ſequitur angulum E G F eſſe partem tertiam duorum rectorum, & æqualem duobus prioribus angulis: ſűt
ergo tria *d* triangula EFG, EGD, DGC *d 4. 1.*

triangula AFG GFE iuxta 4.1. & idcirco anguli AFG, GFE æquales. Eadem methodo oſtendetur triangula FEM, MFD eſſe iuxta 4.1. ac proinde angulos EFM MFD eſſe æquales. Quare anguli, EFG, cũ ſint dimidij ęqualiũ EFM, erunt inter ſe pares. Quia ergo in triangulis GFE, EFM, duo anguli circa rectam EF ſunt pares, & latus adiacens
b 26. 1. EF commune eſt, reliqua latera *b* & anguli erunt ęqualia. Æquales ſunt ergo rectę GE, & EM, dimidiæ ipſius GM. Eodem modo oſtendetur AG eſſe dimidiam ipſius GH. Cumque dimidię GA GE oſtenſę ſint ęquales erunt & tota ta latera pentagoni GH, GM æqualia, ſimiliterque de cæteris procedet demõſtratio. Ergo &c.

Propoſ. 13. Proble. 13

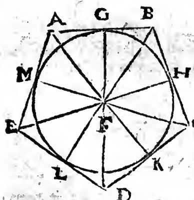
In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

Dati pentagoni ABCDE, anguli duo proximi EAB, ABC biſecentur *a* per rectas AF, BF, & à puncto F, in quo cõcurrunt, ducantur etiam rectæ FC & ceteræ

cæteræ ad reliquos angulos. Quia ergo triangulorum ABF, FBC duo latera BA, BC æqualia sunt, & BF commune, angulique contenti ad B sunt pares; erit [b] totum toti æquale triangulum; angulique & latera correspondentia æqualia: pares ergo sunt anguli B A F, B C F. Cumque anguli BAE, BCD ponantur æquales, sicut BAF est dimidium totius anguli BAE, ita BCF dimidium erit totius BCD. Hic ergo angulus, & reliqui in orbem, secti sunt bifariam. Ducantur deinde FG FH &c. singulæ singulis lateribus perpendiculares. Et quia triangulorum GFB, BFH duo anguli FGB, GBF duobus FHB, FBH sunt pares, & latus FB commune, æqualia [c] etiam erũt latera FG, FH, & his pari modo æquales erunt Fk FL, FM. Quare centro F spatio FG ductus circulus transibit er puncta H, K, L, M, & sic in pentagono

[b] 4. 1.

[c] 26. 1.



L gono

triangula AFG GFE iuxta 4.1. & idcirco anguli AFG, GFE æquales. Eadem methodo ostendetur triangula FEM, MFD esse iuxta 4.1. ac proinde angulos EFM MFD esse æquales. Quare anguli, EFG, cũ sint dimidij ęqualiũ EFM, erunt inter se pares. Quia ergo in triangulis GFE, EFM, duo anguli circa rectam EF sunt pares, & latus adiacens
h 26. 1. EF commune est, reliqua latera h & anguli erunt ęqualia. Æquales sunt ergo rectę GE, & EM, dimidiæ ipsius GM. Eodem modo ostendetur AG esse dimidiam ipsius GH. Cumque dimidię GA GE ostensę sint ęquales erunt & tota ta latera pentagoni GH, GM æqualia, similiterque de cæteris procedet demõstratio. Ergo &c.

Propos. 13. Proble. 13

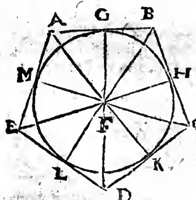
In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

Dati pentagoni ABCDE, anguli duo proximi EAB, ABC bisecentur a per rectas AF, BF, & à puncto F, in quo cõcurrunt, ducantur etiam rectæ FC & ceteræ

cæteræ ad reliquos angulos. Quia ergo triangulorum ABF, FBC duo latera BA, BC æqualia sunt, & BF commune, angulique contenti ad B sunt pares; erit *b* totum toti æquale triangulum; angulique & latera correspondentia æqualia: pares ergo sunt anguli B A F, B C F. Cumque anguli BAE BCD ponantur æquales, sicut BAF est dimidium totius anguli BAE, ita BCF dimidium erit totius BCD. Hic ergo angulus, & reliqui in orbem, secti sunt bifariam. Ducantur deinde FG FH &c. singulæ singulis lateribus perpendiculares. Et quia triangulorum GFB, BFH duo anguli FGB, GBF duobus FHB, FBH sunt pares, & latus FB commune, æqualia *c* etiam erũt latera FG, FH, & his pari modo æquales erunt Fk FL, FM. Quare centro F spatio FG ductus circulus transibit er puncta H, K, L, M, & sic in pentagono

b 4. 1.

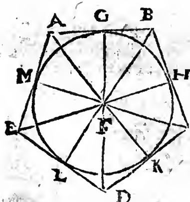
c 26. 1.



cæteræ ad reliquos angulos. Quia ergo triangulorum ABF, FBC duo latera BA, BC æqualia sunt, & BF commune, angulique contenti ad B sunt pares; erit [b] totum toti æquale triangulum; angulique & latera correspondentia æqualia: pares ergo sunt anguli B A F, B C F. Cumque anguli BAE, BCD ponantur æquales, sicut BAF est dimidium totius anguli BAE, ita BCF dimidium erit totius BCD. Hic ergo angulus, & reliqui in orbem, secti sunt bifariam. Ducantur deinde FG FH &c. singulæ singulis lateribus perpendiculares. Et quia triangulorum GFB, BFH duo anguli FGB, GBF duobus FHB, FBH sunt pares, & latus FB commune, æqualia [c] etiam erũt latera FG, FH, & his pari modo æquales erunt Fk FL, FM. Quare centro F spatio FG ductus circulus transibit er puncta H, K, L, M, & sic in pentagono

b 4. 1.

c 26. 1.

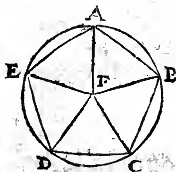


L gono

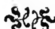
gono circulus erit descriptus.

Propo. 14. Probl. 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.



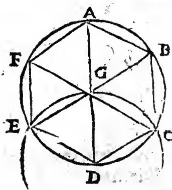
Dati pentagoni ABCDE, angulis ABC BCD sectis bifariam per rectas FB, FC, in F conuenientes, triangulorum ABF BFC duo latera BA, BF duobus BC, BF æqualia erunt; & anguli ad
a 4. 1. B contenti æquales. Basis a ergo AF basi FC æqualis est; ostendeturque vt in sup. prop. reliquas FD FE diuidere bifariam angulos reliquos, & omnes esse lineas inter se æquales. Centro ergo F, spatio FB ductus circulus transibit per reliqua puncta C, D, E. Circa datum ergo &c.



Pro-

Propo, 15. Proble.15.

In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.



In dato circulo ABCD, cuius centrum G, ducta diametro AD centro D, spatio DG ducatur circulus E G C, secans priorem in punctis E & C, ductisque per centrum G ad ambitum rectis CF, EB, iungantur rectæ DE, DC &c. eritque triangulum EGD æquilaterum; quare eius omnes anguli *a* erunt *a* 5. 1.
inter se pares, & quilibet erit pars tertia *b* duorum rectorum, cui per omnia *b* 32. 1.
æquale est triangulum DGC. Iam vero quia recta EG cadens *c* in rectam FC fa- *c* 13. 1.
cit æquales duobus rectis, cum anguli EGD, DGC, sint duę tertiæ duorum rectorum sequitur angulum E G F esse partem tertiam duorum rectorum, & æqualem duobus prioribus angulis: sũt ergo tria *d* triangula EFG, EGD, DGC *d* 4. 1.

vndique æqualia; & quia anguli FGA AGB, BGC ſunt ad verticem angulis prioribus, omnes ſex anguli ad G ſunt
e 26. 3. æquales: quare omnes circumferentiæ e
f 23. 3. AB, &c. ſunt æquales, omnesque f rectę ſubtenſæ. Eſt ergo hexagonum AB CDEF æquilaterum; quod idem eſt æquiangulum; nam omnes anguli FED, & ſimiles conſtant duabus tertijs duorum rectorum, vt oſtenſum eſt. In dato ergo &c.

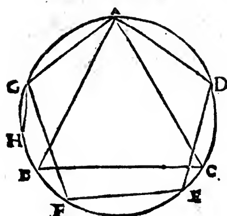
Corollarium.

Hinc manifeſtum eſt latus hexogoni æquale eſſe ſemidiametro circuli; nam latus DE æquale eſt ſemidiametro DG.

Propoſ. 16. Proble. 16.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

In dato circulo ADC deſcribatur
a 2. 4. a triangulum æquilaterum ABC, & pētagonum æquilaterum ADEFG, cuius angulus vnus conſtituatur ad aliquem angulum trianguli puta ad A. Quia ergo AB ſubtendit tertiam partem circuli



li, si totus circulus in quindecim partes æquales diuisus intelligatur, in arcu AGB erunt ex ijs quinque; & cum AG sit quinta pars, in eo arcu erunt partes tres; duæ ergo erunt in arcu GB: quo diuiso bifariam in H erit BH pars decima quinta circuli totius. Quare ductâ subtensâ GH, si aptentur [b] in circulo quatuordecim aliæ æquales, incipiendo a puncto B vel H, descriptum erit in circulo quindecagonum æquilaterum: quod etiam erit [c] equiangulum, cum eius anguli omnes subtendant arcus æquales tredecim laterum quindecagoni: nam angulus H ab arcu GH & eius subtensa comprehensus subtendit ar-

b 1. 4.

c 27. 3.

cumG A D H & ſic de cęteris angulis plura latera quindecagoni ducta eſſen. In dato ergo circulo &c.



EVCLI



EVCLIDIS

ELEMENTORVM

LIBER V.

Definitiones.

1 Pars eſt magnitudo magnitudinis minor maioris, cum minor metitur maiorem. *Hoc eſt, Pars eſt magnitudo minor è maiore ſumpta cum minor aliquoties repetita metitur præcisè, & adæquat maiorem: vt 4. eſt pars ipſius 12. quia repetendo ter 4. adæquamus 12. Vtar hoc libro plerũque numerorum exemplis ſub quibus quantitates continuæ, cum opus fuerit poſſunt intelligi.*

Partem quę metitur totum ſolemus Aliquotam nominare, eamque hic ſolam videtur Euclidis definire; ſolet tamen pars dici etiam ea quę totum non metitur, & vocari poteſt Pars Aliquanta. Sic 5. eſt pars

ſius 12. etiamſi præcisè non metiatur ipſum 12. Vtraque pars hac definitione comprehenderetur.

Pars eſt magnitudo magnitudinis minor maioris, cum minor repetita maiorem poteſt excedere.

2 Multiplex eſt magnitudo magnitudinis maior minoris, cum minor metitur maiorem. *Vt 12. eſt multiplex ipſius 4: quia 4. metitur ipſam 12. Minor vero reſpectu maioris dicitur* Submultiplex. *Æquemultiplices denique magnitudines ſunt quæ à ſuis ſubmultiplicibus pari numero repetitis adæquantur. Sic 4. ad 2; & 6. ad 3. ſunt æquemultiplices, quia ſicut 2 bis ſūptum adæquat 4. ita 3. bis ſumptum metitur 6.*

Vniuerſalius. Multiplex eſt magnitudo magnitudinis maior minoris, cum minor repetita maiorem poteſt excedere. Sic 12. eſt multiplex ipſius 5. &c.

3 Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo. *Quod Græci λόγος dicunt, Latini reddunt nunc Ratio, nunc Proportio, & his vocibus vtemur promiſcuè. Eſt ergo ratio ſeu proportio habitu-*

bitudo quædam secundum quantitatẽ duarum magnitudinum eiusdem generis. Non enim conferri possunt linea cum superficie, sed linea cum linea, superficies cum superficie.

Magnitudinum verò quæ inter se conferuntur potest vna alteram superare excessu qui numeris exprimi potest, vt cum excedit vna secunda seu dimidio, vna tertia, vna quarta, aut simili excessu, cuius habitudo numeris concipi potest: & inter huiusmodi magnitudines est Proportio rationalis. *Aut magnitudo magnitudinem superat excessu qui numeris exprimi præcise non potest; & inter eas est* Proportio irrationalis. *Sic inter diametrum & costam seu latus quadrati est proportio irrationalis, quia diameter excedit costam excessu qui neque est vna secunda costæ, neque vna tertia neque in vlla alia comparatione, quæ numeris possit exacte definiri; siue ad costã comparetur, siue ad ipsam etiam diametrum. Porro quantitatum inter quas exprimitur proportio quæ prior in casu nominandi solet efferri, dicitur* antecedens *posterior quæ subijci solet in alio casu, dicitur* consequens. *Vt cum dico numerus 4.*

est

est duplum ipsius 2; vel 4. est duplum ad ipsum 2. Antecedens est 4. consequens 2.

4 Rationem seu proportionem dicũtur habere inter se magnitudines quæ multiplicatæ possunt se mutuo superare. *Nulla est igitur proportio finiti ad infinitum, linea ad superficiem, cum nulla multiplicatione possit superare aut finitum infinitum, aut linea superficiem.*

5 In eadem proportione dicuntur esse magnitudines prima ad secundam & tertia ad quartam, cum primæ & tertię æquemultiplicia, à secundę & quartæ æquemultiplicibus (quęcunque sit ea multiplicatio) alterum ab altero vel vna deficiunt, vel vna ęqualia, vel vna maiora sunt, si sumantur vt inter se respondent.

Hoc est, si dentur quatuor ordine magnitudines & sumpto quouis æquemultiplici primæ & tertiæ, itemque eodem aut alio æquemultiplici secundæ & quartæ, semper eueniat vt cum multiplex primæ superat, æquat, aut non attingit multiplex secundæ, multiplex etiam tertiæ superet, ęquet, aut non attingat multiplex quartæ, tum demum dices è quatuor illis magnitudinibus

dinibus primam in ea proportione eſſe ad ſecundam in qua eſt tertia ad quartam.

8	16	12	24
12	12	18	18
8	6	12	9
4	2	6	3
A	B	C	D

Tales ſunt magnitudines ABCD: nam ſi ſumatur duplum ipſarum A & C, triplum vero ipſarum B & D, tunc vt multiplum primæ quod eſt 8 ſuperat multiplum ſecundæ 6, ita multiplum ipſius C, ſuperat multiplum ipſius D. In ſequenti vero ordine in quo ſumitur triplum primæ & tertię, ſextuplum vero ſecundæ & quartæ, multipla ſunt pariter æqualia; ac denique in ſupremo ordine ſumpto duplo primę & tertiæ, octuplo vero ſecundæ & quartæ, ſicut multiplum primæ minus eſt multiplo ſecundæ, ita multiplum tertiæ multiplo quartæ; Neque aliud eueniet in alia vlla multiplicatione. Ex quo colligimus primam ad ſecundam in eadem eſſe ratione, in qua eſt tertia ad quartam.

Ab hoc indicio iubet Euclides inueſtigari an magnitudines in eadem proportione ſint; quod quomodo cum natura intima proportionalium cohereat ſic oſtendo. Quia ratio ſeu proportio eſt magnitudinum ſecundum quantitatem comparatio; non eſt

aliud

aliud magnitudines in eadem ratione esse, quam esse in eadem comparatione seu habitudine maioris & minoris, totius & partis; si nomen partis latius sumatur, vt comprehendamus etiam proportionem irrationalem. Non potest autem è quatuor magnitudinibus prima eandem habere comparationem maioris ad secundam minorem, quam habet tertia ad quartam; nisi secunda & quarta pari numero multiplicatæ similiter se habeant ad maiores, quo ad excessum, & defectum. Si enim exempli gratia cum secunda B ter repetita non excedat primam A, quarta tamen D ter accepta superet tertiam C, manifestum erit D non esse ita minus ipso C, sicut B ipso A; aut quod idē est, C non esse ita maius ipso D, sicut est A ipso B, atque adeo quatuor illas magnitudines nō esse in eadē ratione. Iā vero perinde est cōferre minores magnitudines B & D, ad maiores singulas A & C, atq; ad easdem A & C pari numero multiplicatas.

12	3	5	2
A	B	C	D

Nam necesse est quoque similes partes eodē modo se habere quo ad excessum & defectum ad sua tota æqualiter multiplicata. Si enim cum B sexies sumptum, non excedat

dat A bis repetitum, D tamẽ sexies acceptum, superet C bis repetitum; manifestum etiam inde erit B non esse talem partem ipsius A. qualis est D ipsius C, seu quod idẽ est, C nõ ita esse maius ipso D, sicut est A ipso B. Idipsum vero est, quod Euclides docet; iubet enim maiores magnitudines A & C æqualiter multiplicari, seu prima & tertia sumi æquemultiplices, multiplicari etiam æqualiter minores, seu partes B & D; & si semper eodem modo se habeant in excessu & defectu ad tota A & C æqualiter multiplicata, recte colligit, A esse in ea ratione ad B, in qua est C ad D. Atque hoc sane qui penitius intellexerit, perinde esse in cõparatione maioris & minoris, seu in proportione, conferre vnum ad vnum, atque plura ad plura pari numero multiplicata, magno compendio veritatem omnium prope theorematum huius elemẽti penetrabit, eademque sine longo syllogismorum circuitu resoluet statim in prima axiomata, Omne totũ esse æquale omnibus simul suis partibus, & è contra omnes part . . toti æquales esse, aliaque his affinia pronuntiata. Neque vero te moueat quod in huius definitionis explicatione exemplum adhibuerim numerorum,

in

in quibus semper est proportio rationalis, cum tamen indicium ab Euclide allatum valeat etiam in irrationali; perinde enim fuerit si loco numerorum magnitudines substituas in proportione seu rationali seu irrationali constitutas: quod idem intelligatur in omnibus exemplis huius elementi.

6 Magnitudines quę in eadem ratione seu proportione sunt Proportionales vocātur. *Ut magnitudines A, B, C, D,*

4	2	6	3	*sunt proportionales quia bina priores, & bina posteriores*
A	*B*	*C*	*D*	*sunt in eadem proportione.*

7 Quando æquemultiplicium multiplex primæ excesserit multiplicem secundæ, & multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; maiorem proportionem tum habet prima ad secundam, quam tertia ad quartam. *Patet hęc definitio ex quinta. Neque aliud vult, quam si dicas, maiorem esse proportionem primæ ad secūdam quam tertię ad quartā, cum inter primam maiorem & secundam minorem maior est inæqualitas, quam inter tertiam & quartam. Hoc autem inuestigari iubet eodem quo in quinta definitione usus est indicio. Si enim cum duplum primę*

A

8 6 12 15 *A excedat triplum secundæ*
4 2 6 5 *B, duplum tamen tertię C nõ*
A B C D exeedat triplum quartę D, satis patebit maiorem eſſe exceſſum ipſius A ſupra B, quam ipſius C ſupra D: ſeu primam A maiorem habere rationem ad ſecundam B, quam tertiam C ad quartam D.

8 Analogia ſeu proportionalitas eſt rationum ſeu proportionum ſimilitudo. *Quia Latini Rationem & Proportionem pro eodem ſumunt, quam Græci Analogiam dicunt: nos Proportionalitatem diſtinctionis gratia nominabimus. Eſt ergo Proportionalitas rationum ſimilitudo. Vt ſimilitudo quæ eſt inter proportionem duplam quantitatum 6 & 3, & inter aliam duplam quantitatum 4 & 2, dicitur Proportionalitas.*

9 Proportionalitas in tribus minimũ terminis conſiſtit. *Cum enim ſit ſimilitudo duarum proportionum, & vnaquæque proportio ſit inter duos terminos, quatuor terminos requiret Proportionalitas; niſi terminus vnus bis repetatur: vt cum dico ſicut 8 ad 4 ita 4 ad 2. Et tunc tres termini ad proportionalitatem ſufficient.*

10 Cum

10 Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam. *Ut quia proportionales sunt 8, 4, 2, prima 8 ad tertiam 2 dicitur duplicatam habere proportionem eius quam habet ad secundam 4.*

11 Quando vero quatuor fuerint proportionales magnitudines, prima ad quartam triplicatam habet proportionem, & ita deinceps vno amplius, quãdiu proportio extiterit.

12 Homologæ dicuntur magnitudines, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus. *Ut in quatuor magnitudinibus proportionalibus 6 3, 4 2, prima 6 & tertia 4 quæ sunt antecedentes dicuntur homologæ, sicut & consequentes 3 & 2.*

13 Alterna seu permutata proportio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & cõsequentis ad consequentem. *de qua agitur prop. 16. vt si est, sicut 6 ad 3 ita 4 ad 2, erit antecedens 6 ad antecedentem 4 vt consequens 3 ad consequentem 2.*

14 Conuersa ratio est sumptio conse-

quen-

quentis vt antecedentis ad antecedentem & ad consequentem. *De qua prop. 4.*
Vt si est, sicut 6 ad 3, ita 4 ad 2, erit conuertendo.

Vt 3 ad 6 ita 2 ad 4.

15 Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente, velut vnius, ad consequentem *De qua prop. 18.*
Vt si est, sicut 6 ad 3 ita 4 ad 2: Erit componendo.

Vt 9 ad 3 ita 6 ad 2.

16 Diuisio rationis est sumptio excessus quo consequentẽ superat antecedens, ad ipsam consequentem. *De qua prop. 17.*
Vt si est, sicut 9 ad 3 ita 6 ad 2 erit diuidẽdo.

Vt 6 ad 3 ita 4 ad 2.

17 Conuersio rationis est sumptio antecedentis, ad excessum quo antecedens superat consequentem. *De qua propo. 19.*
Vt si est 9 ad 3 sicut 6 ad 2. Erit per conuersionem rationis.

Vt 9 ad 6 ita 6 ad 4.

18 Ex æqualitate ratio est, cum fuerint plures magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quę binę & binæ in

eadem ratione sumantur, fueritque vt in prioribus prima ad vltimam; ita etiã in posterioribus. Vel est sũptio extremarum per substractionem mediarum.

Ut si sint plures magnitudines A, B, C, & alia totidem D, E, F, bina & bina bina in eadem ratione, hoc est vt A ad B ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F; erit ex aquo in prioribus A ad vltimam C, ita etiam in posterioribus prima D, ad F.

A	B	C	D	E	F
12	6	3	8	4	2

Ex aquo 12 ad 3 8 ad 2.

19 Ordinata proportio est cum fuerat vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad cõsequentem fuerit etiã vt consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

Dupliciter institui potest proportio ex aqualitate vno modo quando tam in prioribus quam in posterioribus comparantur prima cum secunda, & secunda cum tertia: & hac est ordinata proportio qua hic definitur & de qua agitur prop. 22: eiusque exemplum positum est def. 18. Altero modo

do sit proportio ex æquo, cum ordo perturbatur in posterioribus, vt apparebit definitione sequenti.

19 Perturbata proportio est cum tribus existentibus magnitudinibus & totidem alijs, fuerit vt in prioribus antecedens ad consequentem, ita etiam in posterioribus: vt autem in prioribus consequens ad aliam quampiam, ita in posterioribus alia quæpiam ad antecedentem.

Vt si sit quemadmodum in prioribus A ad B, ita in posterioribus E ad F, vt vero in prioribus B consequens ad aliam quampiam C, ita in posterioribus alia quæpiam D ad antecedentem E, erit hæc perturbata proportio. de qua agitur prop. 21. & 23.

A	B	C	D	E	F
12	8	4	12	6	4

Ex æquo 12 4 12 4.

Lubet ad extremum breui schemate ponere sub oculos omnes hasce proportionum formas quas animo firmiter comprehendisse plurimum tyronibus proderit.

Quia est vt 9 ad 3 ita 6 ad 2

Erit etiam,

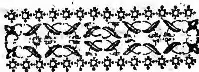
Permutando	*Vt*	9	*ad*	6	*ita*	3	*ad*	2
Conuertendo		3		9		2		6
Componendo		12		3		8		2
Diuidendo		6		3		4		2
Per Conrat		9		6		6		4

Proportio ex æquo.

Ordinata.						*Perturbata.*					
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
12	6	3	8	4	2	12	8	4	12	6	4

Ex equo 12 *ad* 3 8 *ad* 2 12 *ad* 4 12 *ad* 4

Neque vero difficile est aduertere ex ipsis numeris in omnibus hisce ordinibus quatuor magnitudines esse proportionales, seu minores quantitates esse similes maiorum partes: Nam in permutata sicut 6 *est pars subsesquialtera ipsius* 9, *ita* 2 *ipsius* 3. *Seu quod idem est, sicut* 6 *semel continetur in* 9 *& supersunt* 3 *pars dimidia ipsius* 6; *ita* 2 *semel continetur in* 3, *& superest* 1. *pars dimidia ipsius* 2. *Idem in reliquis ordinibus deprehendes.*



Pro-

Propositiones.

Propos. 1. Theore. 1.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum numero æqualium æquemultiplices singulæ singularum; quam multiplex est vna vnius, tam multiplices erunt omnes omnium.



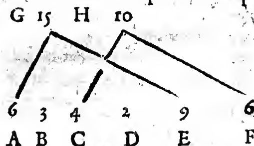
Hoc est, Æquemultiplicium magnitudinum quam multiplices sunt singulæ singularum, tam multiplices sunt omnes omnium. Vt quia ęquemultiplices sunt A ad B, C ad D; si A & C colligantur in E, similiterque B & D colligantur in F, quam multiplex erat A ipsius B, tam multiplex erit E ipsius F.

Non enim maiora aut minora sunt tota quam suę omnes partes: non potest proinde totum E pluries vel pauciore numero continere totum F, quã A & C partes omnes totius E, continerẽt B & D partes omnes totius F.

Propoſitio 2. Theore. 2.

Si prima ſecundæ fuerit ita multiplex vt tertia quartæ, fuerit autem & quinta multiplex ſecundæ vt ſexta quartæ; erit compoſita ex prima & quinta ſecundæ ita multiplex, vt tertia & ſexta primæ.

Sit prima A ita multiplex ſecundæ B, ſicut tertia C quartæ D: quinta vero E ita multiplex ſecundę B, vt ſexta F quartæ D. Dico compoſitam ex prima



A & quinta E hoc eſt G, ita multiplicem fore ſecundæ B, ſicut compoſita ex tertia & ſexta hoc eſt H, multiplex eſt quatæ D.

Nam quia B & D ſecunda & quarta, continētur pari numero in ſingulis ſuis multiplicibus, continebunturquoque

a pa-

a pari numero in multiplicibus colle- a 1. 5.
ctis hoc est in G, & H.

Propo. 3. Theore. 3.

Si prima secundæ ita est multiplex ut tertia quartæ, & primæ ac tertiæ sumantur æquemultiplices; erit multiplex primæ tam multiplex secundæ, quam multiplex est multiplex tertiæ ad quartam

Vt quia A continet B, sicut C ipsam D; si sumantur E & F æquemultiplices ipsarum A & C, B continebitur toties in E, quoties D in F.

E 8		F 12	
4	2	6	3
A	B	C	D

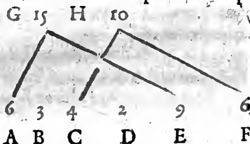
Nam sumere multipla ipsarum A & C non est aliud quam sumere plures A & C; Sicut ergo B & D æqualiter continebantur in singulis A & C, continebuntur etiam a æqualiter in ijsdem a 1. 5. A & C pari numero multiplicatis in E & F.



Propositio 2. Theore. 2.

Si prima secundæ fuerit ita multiplex vt tertia quartæ, fuerit autem & quinta multiplex secundæ vt sexta quartæ; erit composita ex prima & quinta secundæ ita multiplex, vt tertia & sexta primæ.

Sit prima A ita multiplex secundæ B, sicut tertia C quartæ D: quinta vero E ita multiplex secundę B, vt sexta F quartæ D. Dico compositam ex prima



A & quinta E hoc est G, ita multiplicem fore secundæ B, sicut composita ex tertia & sexta hoc est H, multiplex est quatæ D.

Nam quia B & D secunda & quarta, continētur pari numero in singulis suis multiplicibus, continebunturque a pa-

a pari numero in multiplicibus colle- a 1. 5.
ctis hoc est in G, & H.

Propo. 3. Theore. 3.

Si prima secundæ ita est multiplex vt tertia quartæ, & primæ ac tertiæ sumantur æquemultiplices; erit multiplex primæ tam multiplex secundæ, quam multiplex est multiplex tertiæ ad quartam

Vt quia A continet B, sicut C ipsam D; si sumantur E & F æquemultiplices ipsarum A & C, B continebitur toties in E, quoties D in F.

E 8		F 12	
4	2	6	3
A	B	C	D

Nam sumere multipla ipsarum A & C non est aliud quam sumere plures A & C; Sicut ergo B & D æqualiter continebantur in singulis A & C, continebuntur etiam a æqualiter in iisdem a 1. 5. A & C pari numero multiplicatis in E & F.



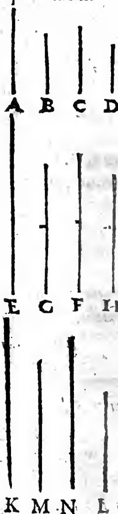
Propositio 4. Theore. 4.

Si prima ad secundam eam proportionem habuerit quam tertia ad quartã; habebunt quoque eandem rationem æquemultiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ iuxta quamuis multiplicationem, si sumantur vt inter se respondent.

E	F	G	H
8	6	12	9
4	2	6	3
A	B	C	D

Vt si A habuerit eam proportionem ad secundam B, quã habet tertia C ad quartam D; sumptis E & G æquemultiplicibus ipsarum A & C, itemque F & H ijsdem vel alijs æquemultiplicibus ipsarum B & D: erit E multiplex ipsius A, ad F multiplicem ipsius B, sicut G multiplex tertiæ C, ad H multiplicem quartæ D. Nam, vt explicuimus ad def. 5. in ratione maioris & minoris, siue in proportione, perinde est conferre singulas B & D, ad singulas A & C, atque B & D æqualiter multiplicatas, ad A & C pari inter se numero multiplicatas. Si ergo singulæ A & G, ad singulas B & D eodem modo se.

do se habent, eędem A & C æqualiter multiplicatæ in E & G, erunt etiā in eadem ratione ad B & D æqualiter multiplicatas in F & H.



Longiore circuitu idem alij sic concludunt: Sit prima A ad secundam B sicut tertia C ad quartam D. Sumptis deinde E & F, ipsarum A & C æquemultiplicibus & G & H æquemultiplicibus ipsarum B & D. Dico fore etiā E multiplicem primę A, ad G multiplicem secundæ B, vt est F multiplex tertię C, ad H multiplicem quartæ D. Accipiantur enim K & L ipsarum E, F, & M, N ipsarum G H ęquemultiplices. Tunc vero quia ęque multiplex est E ipsius A vt F ipsius C; accep-

tæ-

a 1. 5. teq; sũt ipsarũ EF æquemultiplices kL, ita ergo multiplex est k ipsius A sicut a L ipsius C. Eadẽ de causa ita multiplex est M ipsius B, vt N ipsius D. Et quia est vt A ad B ita C ad D, acceptæq; sunt ipsarũ A, C æquemultiplices K, L, ipsarũ vero B, D aliæ quęcunque M, N: ergo si
b 6. def. 5. k b superat M, superabit & L ipsam N, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor: suntque K, L ipsarum E, F æquemultiplices, M vero & N ipsarum G, H.
c def. 5. 5. Est ergo vt E ad G ita F ad H. Si ergo prima ad secundam &c.

Hæc inquam forma demonstrandi per assumptas æquemultiplices in sequentibus quoque propositionibus potest adhiberi, in quibus ego vtar compendio. Nam definitione quinta rite percepta facile assequemur earum propositionum veritatem absque longo illo ambitu æquemultiplicium. Quod semel hoc loco monuisse sit satis.

Corollarium.

4	2	6	3
A	B	C	D

Ex hac propositione demõstrari potest Propositio cõuersa, quæ tamen ex terminis satis est euidens. Nam si A est ita maius ipso B, si-

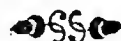
B, sicut C ipso D; satis est euidens B ita minus fore ipso A, sicut D minus est ipso C, quæ sunt vnum & idem. Neque aliud est proportio conuersa.

Propo. 5. Theore. 5.

Si magnitudo magnitudinis ita multiplex fuerit vt ablata ablatæ; reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

E	4	F	2
C	8	D	4
A	12	B	6

Vt quia A ita multiplex est ipsius B, sicut ablata C, ablatæ D; erit residua E, residuæ F ita multiplex, vt tota A totius B. Si enim cũ A sit duplum ipsius B, & pars ablata D, dupla similiter partis ablatæ D, non esset residua E duplex residuę F, non continerentur, omnes partes totius B, in omnibus partibus totius A, sicut totum in toto; quod absurdum est. Erit ergo residua residuæ ita multiplex, vt tota totius.



Pro-

Propo. 6. Theore. 6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquemultiplices fuerint, & ablatæ quædam earundem æquemultiplices, erunt reliquæ iisdem vel æquales vel æquemultiplices.

G 2	H 3	G 8	H 12
E 10	F 15	E 4	F 6
A 12	B 18	A 12	B 18
C 2	D 3	C 2	D 3

Vt quia duę magnitudines A, B, duarum C, D, sunt æquemultiplices, si auferantur ex A, B quęuis ęquemultiplices earundem C, D, puta E & F; residuæ G & H erunt iisdem C & D aut ęquales, aut ęquemultiplices. Cum enim C & D æqualiter contineantur in totis A & B, & in eorum aliquibus partibus E & F, æqualiter quoque continebuntur in reliquis G & H. Quare reliquæ G & H aut iisdem C, D, sunt æquales, aut æquęmultiplices. In priore exemplo sunt G, H æquales ipsis C, D, in posteriore ęquemultiplices.

Pro-

Propo. 7. Theore. 7.

Æquales ad eandem magnitudinem, & eadem ad æquales eandem habent proportionem.

4	4	2
A	B	C

Vt si A & B sint æquales magnitudines, quę erit proportio vnius, puta ipsius A, ad C; eadem erit alterius B ad eandem C. Itẽ quam proportionem habet C, ad A; eãdem habet ad B ęqualem ipsi A; quod manifestum est ex terminis.

Propositio .8 Theor. 8.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem quam ad maiorem magnitudinem.

6	4	2
A	B	C

Vt duarum magnitudinum A & B, A maior rationem habet maiorem ad C, quam habeat B maior ad eandem C: maior enim proportio est, vbi maior est excessus secundum quantitatem. Insuper maiorẽ rationem habet A ad minorem magnitudi-

tudinem B. ob candem caussam.

Propositio 9. Theor. 9.

Quæ ad eandem eandem habent rationem, æquales sunt magnitudines. Itẽ ad quas vna eadem habet rationem, sunt æquales.

4	4	2
A	B	C

Vt quia A & B eandem habent rationem ad C, sunt inter se æquales. Itẽ quia magnitudo C eandem habet proportionem ad A & B necesse est ipsas A & B inter se æquales esse. *Est conuersa prop. 7. & per se euidens.*

Propo. 10. Theor. 10.

Magnitudinum habentium proportionem ad eandem, quæ maiorem habet, ea maior est. Cum vero eandem ad duas habet rationem, ea ad quam maior est ratio, est minor.

6	4	2	6	2	4
A	B	C	D	E	F

Vt si A maiorem habet rationem ad C quam B ad eandem C, A maior erit quam B. Item si D habet maio-

maiorem rationem ad E quam ad F, E minor eſt quam F. *Conuerſa eſt prop. 8. & per ſe manifeſta.*

Propoſi. 11. Theor. 11.

Quæ eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe ſunt eædem.

4	2	4	2	4	2
A	B	E	F	C	D

Vt ſi proportiones ipſarum A, B, & ipſarũ C, D ſint eædem vni tertiæ ipſarum E, F, erunt etiam eędem inter ſe.

Propo. 12. Theor. 12.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, erit vt vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita omnes entecedentes ad omnes conſequentes.

Vt ſi eſt A ad B ſicut C ad D, erit E, hoc eſt omnes ſimul antecedentes, ad F omnes ſimul conſequentes, ſicut A ad B vel C ad D. Cum enim tota E & F ſint diuiſa in totidem partes, E quidem in A & C, F vero in B & D, quæ ſingulę ad ſingulas eandem habent rationem, non

E 10 F 5

4 2 6 3
A B C D

non poteſt illa proportio eſſe alia quã quæ totorum inter ſe; alias omnes partes, omnibus partibus aliter eſſent maiores & minores, quàm tota ipſa: quod fieri non poteſt, cùm tota aliud non ſint quam omnes ſuæ partes.

Propoſ. 13. Theor. 13.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem habeat, quam quinta ad ſextam; maior quoque erit ratio primæ ad ſecundam, quam quintæ ad ſextam.

9	3	6	2	8	4
A	B	C	D	E	F

Hoc eſt. Earũdem duarum proportionum ſi vna maior eſt quam aliqua tertia, etiam altera

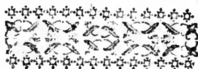
tera maior erit: vt si sunt duæ rationes eædem inter AB & CD, sit autem maior ratio inter C, D quam inter E, F; erit quoque maior ratio inter AB quã inter EF: quod ex terminis notum est.

Propo, 14. Theore 14.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam sit autem prima magnitudo maior quã tertia, secunda quoque maior erit quã quarta; si minor, minor; si æqualis, æqualis.

6	3	4	2
A	B	C	D

Vt si fuerit A ad B sicut C ad D, & A minor sit quã C; maior quoque erit B quam D. Cum enim B & D totorum A & C ponantur esse partes similes, si B sit pars maioris A C vero minoris D, necessario B maior erit quam D. Quod si totum A, toti C, aut æquale esset aut minus, talis etiam foret pars B, respectu partis D, vt satis constat



N Pro-

Propoſitio 15. Theore. 15.

Partes cum pariter multiplicibus eandẽ proportionẽ habent, ſi ſumãtur vt ſibi reſpondent.

12	4	6	2
A	B	C	D

Hoc eſt. Partes pari numero contentæ in ſuis totis, eandem ſeruant inter ſe rationem ac tota ipſa. Vt magnitudines B & D quæ ſunt eodem numero in totis A & C, eandem inter ſe habent rationem quam tota A & C. Nam ſi tota reſoluantur in omnes partes ſimiles ipſis B & D, tunc quæ erit ratio cuiuſlibet ad quamlibet, eadem erit* ratio omnium ad omnes, ſeu totius ad totũ.

a 4. 5.

Propo. 16. Theore. 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint. etiam permutatæ proportionales erunt.

E	F	G	H
18	9	8	4
6	3	4	2
A	B	C	D

Vt ſi eſt A ad B ſicut C ad D, erit etiam permutando vt A ad C, ita B ad D, quæ eſt alterna ſeu permutata proportio. Sumptis enim E, F, ipſarum

ſarum A, B, & G, H, ipſarum C, D, quibuſcunque æquemultiplicibus, erunt multiplices EF, GH, in eadem ratione cum ſubmultiplicibus a AB, CD. Quare E F, G H erunt proportionales, ac proinde ſi E maior, minor, aut par ſit ipſi G, talis quoque erit F ad H. Sed E, F, ipſarum A B, & G H ipſarum C, D ſunt vtcunque æquemultiplices. Eſt ergo vt A b ad C, ita B ad D.

a 15. 5.

b 6. def. 5.

Propoſ. 17. Theor. 17.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, & diuiſæ proportionales erunt.

A 8 C 4 B
D 6 F 3 E

Sint compoſitæ magnitudines AB, CB, DE, FE proportionales, hoc eſt, vt AB ad CB, ita DE, ad F E; Dico fore etiam diuidendo, vt AC ad CB, ita DF ad F E. Quia enim CB eſt talis pars totius AB, qualis FE totius DE, erit CB ad reliquas compartes AC, ſicut F E ad reliquas compar-

A	8 C 4	B
D	6 F 3	E

tes AC, ſicut FE ad reliquas compartes DF. Nõ enim poſſunt eſſe ſimiles partes reſpectu totorum, niſi etiam ſint ſimiles reſpectu ſuarum compartium, vt ſatis manifeſtum eſt.

Corollarium.

Ex his demonſtrari poteſt proportio ex conuerſione rationis: Nam in eodem exemplo, eſt

Vt AB ad CB ita DF ad FE.
Et diuid. Vt AC ad CB ita DF ad FE.
Et conue. Vt CB ad AC ita FE ad DF.
Ergo cõp. Vt AB ad AC ita DE ad DF.

Quæ poſtrema eſt conuerſio rationis iuxta definitionem 16. 5.

Propo. *18.* Theore. *18.*

Si diuiſæ magnitudines proportionales fuerint, & compoſitæ proportionales erunt.

Hoc eſt, in ſuperiore exemplo ſi partes CB, FE ſimiliter ſe habeant ad reliquas compartes AC & DF; ſimiliter quoque ſe habebunt ad tota AB & DE. *Eſt conuerſa præcedentis.*

Pro-

Proposi. 19. Theore. 19.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam erit vt tota ad totam.

E 4	F 2
C 8	D 4
A 12	B 6

Vt si ablatæ C & D sint inter se in ea ratione, qua totæ A & B, erunt etiam residuæ E & F, vt totæ A & B. Cum enim ablata C ita maior sit ablatâ D, vt tota A, totâ B; si E residua non esset eodem modo maior residuâ F, aliter essent maiores omnes partes omnibus partibus, quam totum toto: quod fieri non potest.

Propos. 20. Theore. 20.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem, binæ & binæ in eadem ratione, ex æquo autem prima maior fuerit quam tertia; erit & quarta maior quam sexta, & si æqualis, æqualis; si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem aliæ D, E, F, binę & binę in eadē ratione, hoc est vt A ad B, ita D ad E, &

12 9 6 8 6 4 vt B ad C ita E ad
A B C D E F F. Dico si A maior, minor, aut par sit ipsi C, talem etiam fore D respectu ipsius F. Sit primum A maior quam C: Quia ergo A maior est quam C, & datur alia quędam B, habebit A ad B, maiorem a rationem quam C, ad eandem B. Est autem ex positis vt A ad B, sic D ad E & vt B ad C ita E ad F: ergò conuertendo, est vt C ad B ita F ad E; quare D ad E maiorem b habet rationem quā F ad E; maior ergo est c D quam F. Similiter procedet demonstratio si A ipsi C aut ęqualis ponatur, aut minor. Si ergo fuerint tres magnitudines &c.

a 8 5.
b 13. 5.
c 10. 5.

12 9 6 3 | 8 6 4 2
A B C G | D E F H

Neque tantum vera est propositio si ternæ magnitudines sumantur, sed etiamsi quaternę & quouis alio numero; semper enim si prima in prioribus minor, maior, aut ęqualis est vltimæ, ita etiam erit in posterioribus. Vt si ternis magnitudinibus ABC, & DEF addantur G & H, sitque C ad G, sicut F ad H, tunc omissis B & E erunt ACG, & DEF

& DFH ternæ & ternæ magnitudines, & de his procedet demonſtratio prius facta.

Propo. 21. Theore. 21.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem, binæ & binæ in eadem ſed perturbata ratione, ex æquo autẽ prima maior fuerit quam tertia, erit etiam quarta maior quam ſexta: ſi minor, minor; ſi æqualis, æqualis.

Sint tres magnitudines A,B,C,& totidem alię D, E, F, binæ & binæ in eadẽ, ſed perturbata ratione; hoc eſt vt A ad B, ſic E ad F & vt B ad C, ſic D ad E. Dico, ſi A maior ſit, minor, aut æqualis ipſi C, talem quoque fore D reſpectu ipſius F. Sit prima A maior ipſa C. Cum igitur A ſit maior quam C, & detur alia quędam B, habebit *a* A ad B maiorem rationem quã C ad eandem B; ſed ex poſitis vt A ad B, ita eſt E ad F, *a* 8. 5.

12	8	4	12	6	4
A	B	C	D	E	F

& vt B ad C ita E ad F, ergo conuertendo vt C ad B, ita E ad D: quare E ad F

b 13. 5. maiorem habet rationem, quam b E ad
c 10. 5. D. Minor eſt c ergo F quam D. Similiter oſtendetur ſi A minor ſit, aut æqualis ipſi C, talem quoque fore D reſpectu ipſius F. Si ergo fuerint tres magnitudines &c.

Propoſitio 22. Theor. 22.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ totidem binæ & binæ in eadem ratione ſumantur, erunt quoque ex æquo in eadem ratione.

12	9	6	8	6	4
A	B	C	D	E	F

Sint quotcunq; magnitudines, AB C, & aliæ totidem DEF in eadem ratione; hoc eſt vt A ad B, ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F. Dico ex æquali fore illas in eadem ratione: hoc eſt, fore A ad C, ſicut D ad F. Quia enim oſtenſum eſt ſi A ſuperat C, D quoque ſuperare F, & ſi minus, minus &c. ita quoque a erit in æquemultiplicibus: hoc autem eſt quatuor magnitudines A, C, D, F, eſſe proportionales.

a def. 5. 5.

Pro-

Propo. 23. Theore. 23.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem binæ & binæ in eadem sed perturbata ratione, erunt etiam ex æquo in eadem ratione.

12	8	4	12	6	4
A	B	C	D	E	F

Repetatur propo. 21. cum exemplo, in quo cum probatũ sit, si A superat C, D quoque superare F, aut minus esse, &c. ita quoque erit in ęquemultiplicibus. Quare est ex ęquo vt A ad C, ita D ad F.

Propositio 24. Theore. 24.

Si prima ad secundam fuerit vt tertia ad quartam, quinta autem ad secundã eam habeat rationem quam sexta ad quartam, habebit composita ex prima & quinta eam proportionem ad secundam, quam tertia & sexta simul ad quartam.

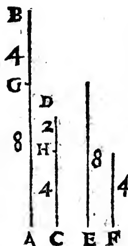
10	4	2	6	3	15
E	A	B	C	D	F

Quia enim secunda B est talis pars singularum A & E primæ & quintę, qualis est quarta

ta D ſingularum C & F, erit quoque B talis pars collectarum A & E, qualis eſt D collectarum C & F.

Propo. 25. Theore. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima cum minima duabus reliquis erunt maiores.



Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, & F. Dico AB maximam, cum minima F, maiores eſſe duabus ſimul reliquis CD & E. Sumatur enim AG ęqualis ipſi E, & CH ipſi F. Quia ergo eſt vt AB ad CD ita E ad F, eſtque AG ipſi E, & CH ipſi F æqualis, erit vt AB ad CD, ita AG ad CH; hoc eſt vt tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH: reliqua igitur GB [a] erit ad reliquam DH vt tota ad totam: eſt autem AB maior quam

a 19. 5.

CD

C D, ergo maior quoque B G quam DH. Cumq; AG ipsi E, & CH ipsi F æqualis sit; pares erunt A G & F, ipsis CH & E. Iam vero quia ipsis A G & F additur G B, ipsis vero C H & E additur DH minus quam GB, erunt post additionem AB & F maiores, quam CD & E. Si igitur quatuor magnitudines &c.

Quæ sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, & alijs adiecta.

Proposi. 26. Theor. 26.

Si prima ad secundam maiorem habuerit rationem quam tertia ad quartã, habebit conuertendo secunda ad primam minorem rationẽ, quam quarta ad tertiam.

8	4	5	3
A	B	C	D

Hoc est si A est totum maius respectu ipsius B, quam C respectu quartæ D: erit B minor pars respectu ipsius A, quam D respectu ipsius C. quod per se est euidens.

Pro-

Propositio 27. Theor. 27.

Si prima ad secundam maiorem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam maiorem rationem, quam secunda ad quartam.

8 4 5 3
A B C D

Quia enim D ponitur pars maior totius C, quã B totius A; non potest pars B supra partem D, tantum excessum habere, quantum habet totũ A supra totum C.

Propo. 28. Theor. 28.

Si prima ad secundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartã, habebit prima cum secunda maiorem rationem ad secundam, quam tertia & quarta ad quartam.



Nam quia B est minor pars ipsius A, quã D ipsius C; si vtraque semel addatur, tam B ipsi A, quam D ipsi C, adhuc B minor pars e-

rit

rit totius E, quam D totius F.

Propo. 29. Theor. 29.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeant rationem, quam tertia & quarta ad quartam; habebit etiam diuidendo prima ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam.

Nam in exemplo superiore. Quia E est maius totum respectu partis B, quã F respectu ipsius D, si vtraque pars ex suo toto tollatur, A residuum ex E, maius erit respectu ipsius B, quam C residuum ex F, respectu ipsius D.

Propo. 30. Theor. 30.

Si prima & secunda ad secũdam maiorem proportionem habeãt, quam tertia & quarta ad quartam, habebunt per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiã.

Nam si totum E maius est respectu ipsius B, quam F respectu ipsius D: B

minor

minor erit pars ipsius E, quam D totius F. Quare residuum A maior erit pars totius E, quam residuum C totius F. Hoc autem idem est ac si dicas totum E minorem habere rationem ad primam A, quam totum F ad tertiam C.

Propo. 31. Thore. 31.

Si sint tres magnitudines, & totidem aliæ, habeatque prima priorum maiorem rationem ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam, secunda item priorũ maiorem habeat ad tertiam, quam in posterioribus secunda ad tertiam, etiam ex æquo habebit prima priorum maiorem rationem ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.

16	8	4	9	5	3
A	B	C	D	E	F

Nam si magnitudines illæ sint ABC, DEF, permutando eas proportiones quæ in propositione ponuntur,

Erit

Erit maior	A	ad	D	quã	B	ad E.
Et eadẽ ratione maior	B	ad	E	quã	C	ad F.
Quare multo maior	A	ad	D	quã	C	ad F:
Ergo permut. maior	A	ad	C	quã	D	ad F:

Proposi. 32. Theore. 32.

Si sint tres magnitudines, & totidem aliæ, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Item secundæ priorum ad tertiam, maior quam primæ posteriorum ad secundam: erit etiã ex æquo maior ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

16	8	4	9	6	4	6	9	
A	B	C	D	E	F	G	H	

Sint illę magnitudines A, B, C D, E, F, sitq; præterea vt G ad C ita D ad E, & vt H ad G, ita E ad F, collocabunturque ternæ & ternę magnitudines D, E, F; H, G, C, in eadem sed perturbata ratione; eritque a ex æquo vt D ad F ita H ad C. a 20. 5.

Nunc vero quia est vt G ad C, ita D ad E

b ex hyp. ad E maior erit b ratio ipsius B ad C, quam G ad C, ideoque B maior est quã G, & per consequens maior ratio est ipsius A ad G quam ad B: est autem A ad B, maior quam E ad F, multo ergo maior est A ad G, quam E ad F. Rursus quia est H ad G, vt E ad F, maior erit A ad G quam H ad G; quare A maior est quam H, & per consequens maior est A ad C, quam H ad eandem C. Sed ostensum fuit esse vt H ad C, ita D ad F, maior est ergo ratio ipsius A ad C, quã ipsius D ad F: quod est propositum.

Propo. 33. Theor. 33.

Si tota ad totã maiorem rationẽ habuerit, quã ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam maiorem rationem quam tota ad totam.

E 8	F 3
C 4	D 3
A 12	B 6

Vt si totum A ad totũ B maiorem habeat rationem, quam ablatum C, ad ablatum D; maiorem habebit residuum E ad residuum F, quã totum A, ad totum B. Nam sicut totũ A est maius toto B, ita omnes simul partes

partes, omnibus partibus. Quia ergo pars C minus superat partem D, quam totum A totum B; residua pars E debet magis superare residuam F, quam totũ A totum B, vt excessu maiore ipsius E compensante defectum ipsius C, partes C & E ita sint maiores partibus D & F, sicut totum A maius est toto B.

Proposi.34. Theore.34.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ totidem, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quã secundæ ad secundam, & hæc maior quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes simul priores, ad omnes simul posteriores, maiorem rationem, quam omnes priores relicta prima ad posteriores omnes prima similiter relicta; minorem autem quã prima priorum ad primam posteriorum; maiorem tamen quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

12 8 4 6 5 3
A B C D E F

Sint quotcunque magnitudines O ABC,

ABC, & aliæ totidem D E F, ita se habentes vt proponitur.

Quia ergo maior est A ad D quam B ad E.
Erit permuta. maior A ad B quam D ad E.
Et componen. maior AB ad B quam DE ad E.
Et permuta. maior AB ad DE quam B ad E.

Quia ergo maior est tota AB ad totam DE, quam ablata B ad ablatam E, maior erit a reliqua A ad reliquam D, quam tota AB ad totam DE.

a 32. 5.

Eadẽ ratione maior erit B ad E quã tota BC ad to. EF
Multo ergo maior est A ad D quam BC ad EF.
Et permutat. maior A ad BC quam D ad EF.
Et compo. maior ABC ad BC quã DEF ad EF.
Et permuta. maior ABC ad DEF quã BC ad EF.

quod erat primo loco propositum. Nunc vero quia maior est tota ABC, ad totam DEF, quam ablata BC ad ablatam EF, erit & maior reliqua A ad reliquam D, quam tota ABC b ad totam DEF; quod erat secundum.

b 32. 5.

Denique quia maior est B ad E quam C ad F.
Erit permuta. maior B ad C quam E ad F.
Et compo. maior BC ad C quã EF ad F.
Et permutat. maior BC ad EF quam C ad F.
Ostẽsa est autẽ ma. ABC ad DEF quã BC ad EF
Multo ergo maior est ABC ad DEF quã C ad F.

Quod erat tertio loco propositum.

Eadem methodo procedetur si quaternę proponantur magnitudines, aut aliæ plures quocunque numero.

EVCLI-

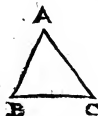


EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER VI.

Definitiones.

1 Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera circa æquales angulos proportionalia.

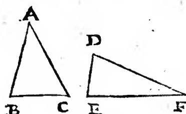




Vt triangula ABC, DEF, erunt ſimilia, ſi ſingulos angulos ſingulis habeāt pares, hoc eſt ſi angulus A, angulo D, anguli vero B & C, angulis E, & F ſint æquales; item ſi latera circa æquales angulos ſint proportionalia, hoc eſt ſi ſit vt AB ad AC, ita DE ad DF; & vt AB ad BC, ita DE, ad EF; ac denique vt AC ad

CB, ita DF ad FE.

2 Reciprocæ figuræ sunt cum in vtraque figura antecedentes & consequentes termini rationum fuerint.



Hoc est figuræ reciprocæ sunt cum in vna figura reperitur antecedẽs vnius proportionis, cuius consequens est in secũda; & cum è contra antecedens alterius similis proportionis est in secunda figura, cuius consequens est in prima; vt triangula ABC, DEF, erunt reciproca, si fuerit vt AB, ad DF; ita DE, ad AC, tunc enim antecedens primæ proportionis reperitur in triangulo primo ABC & in altero est cõsequens; at secundæ proportionis antecedẽs est in secundo triangulo, consequens in primo.

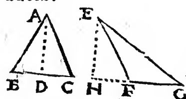
3 Extrema ac media ratione recta linea secta esse dicetur, cum est vt tota ad ad maius segmentum, ita maius segmẽtum ad minus.



Sic recta AB, erit secta in C, extrema

trema ac media ratione, si fuerit ut tota AB ad maius segmentum AC, ita AC maius segmentum ad CB minus.

4 Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basim deducta.



Ut trianguli ABC altitudo est AD, ducta perpendiculariter a vertice ad basim BC. Item trianguli EFF, altitudo est EH, extra triãgulum cadens in basim FG, productam in H.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatę aliquam rationem effecerint.

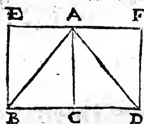
Quantitates rationum non sunt aliæ quam numeri à quibus denominatur proportio: sic 3. est quantitas proportionis triplę, 2. duplæ, &c. Ratio ergo ex rationibus componitur, cum denominatores proportionum inter se multiplicati aliquam proportionem efficiunt; ut ex ratione dupla & tripla componitur sextupla; nam denominator duplæ qui est 2. & denominator tri-

plę qui est 3. inter se multiplicati faciunt 6 denominatorem proportionis sextuplæ cõposita.

Propositiones.

Proposi. 1. Theor. 1.

Triangula & parallelogramma, quorũ eadem sit altitudo, habent se vt bases.



Sint triangula ABC, ACD, habentia eandem altitudinem AC, item parallelogrãma EC, CF, habentia eandem altitudinem AC. Dico illa inter se habere proportionem quã habent bases BC, & CD. Cum enim triangula sint constructa intra parallelas BD, EF, (sicut possunt constitui inter parallelas quæcunque alia triangula eiusdem altitudinis) si bases CB, & CD, sint æquales, erunt & triangula *a* super illis basibus æqualia. Quod si basis CB, maior esset, aut minor basi CD, esset quoque triangulum ABC, maius

a 38. 1.

maius aut minus triangulo A C D; & sic quoque erit sumptis æquemultiplicibus tam basium quam triãgulorum; nam perinde est conferre singula ad singula, atque pariter multiplicata ad pariter multiplicata, quemadmodum definit. 5. lib. 5. explicatum est. Sunt ergo triangula ABC, ACD, inter se vt bases CB, & CD.

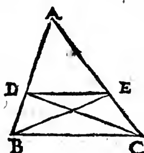
Iam vero si triangula sint vt bases, etiam parallelograma: [b] nam hæc sunt dupla triangulorum partes autem ęquemultiplicium [c] in eadem sunt ratione atque ipsa æquemultiplicia. b 34. 1. c 15. 5.

Propositio 2. Theore. 2.

Si in triangulo ducatur recta lateri parallela; secabit proportionaliter reliqua eiusdem trianguli latera. Et si trianguli latera secta sint proportionaliter, recta per sectiones ducta tertio lateri erit parallela.

In triangulo ABC, ducatur DE, ipsi B C, parallela; quo facto dico latera AB, AC secta esse proportionaliter; hoc est, esse vt A D, ad DB, ita AE, ad

a 37. 1. EC. Ductis enim rectis BE, CD, a erunt triangula BED, DCE, in eisdem
b 7. 1. parallelis æqualia, b & habebunt proinde eandem rationem ad triangulum
c 1. 6. A D E. c Sed quam proportionem habet triãgulũ ADE ad DEB, eandem habet basis A D, ad DB (cum triangula sint in eadem altitudine, quam ostenderet perpendicularis quæ ex E duci potest ad AB) & quam proportionem habet idem triangulum ADE, ad ipsum CDE, eandem



d 11. 6. habet basis A E, ad basim EC; d Cum ergo ostẽsum sit ambo triangula DBE, DEC, eandem habere rationem ad ipsum ADE, bases quoque BD, EC, eandem habebunt proportionem ad latera DA & EA.

Iam vero si latera AB, AC, proportionaliter secta sint, cum sit ob eandem altitudinem vt AE ad DB, ita triangulũ
e 1. 6. ADE e ad ipsum DEB; & vt AE ad EC ita ADE ad ipsum EDC; sicut in eadem ratione ponitur esse latera AD, DB, & AE, EC;

A E, E C; erunt etiam triangula DBE, DEC in eadem ratione ad triangulum ADE; Erunt ergo *f* triãgula DBE, DEC inter se æqualia: cumque habeãt eandem basim DE, erunt *g* constituta inter parallelas: parallelę ergo sũt BC & DE. Si ergo in triangulo &c. *f* 9. 5. *g* 39. 1.

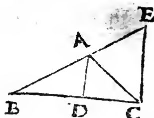
Propo. 3. Theor. 3.

Si trianguli angulus secetur bifariam, & recta angulum secans secet & basim, habebunt basis partes eãdem proportionem quam reliqua trianguli latera. Et si basis partes eandem habeant rationem quam reliqua inter se latera, recta à vertice ad sectionem baseos ducta trianguli angulum secabit bifariam.

Trianguli ABC, angulus BAC, bisecetur per rectam AD; dico in partibus basis esse vt BD ad DC, ita BA, ad AC: per C, enim ducatur CE ipsi AD parallela, cui BA producta occurrat in E. *a* Quia ergo in triangulo BEC, recta DA ipsi CE, est parallela, erit sicut BD, ad *a* 2. 6.

DC,

ad DC, ita BA, ad AE, seu ad AC, quę ipsi AE æqualis est; Si ergo trianguli angulus &c. Esse autem rectam AC æqualem ipsi AE, sit ostendo. Quia recta
b 29. 1. AC tangit parallelas AD, EC, anguli [b]
c 29. 1. alterni CAD, ACE sunt ęquales, [c] & quia recta AE, tangit easdem parallelas, angulus externus BAD interno & opposito AEC, est æqualis: sũt ergo anguli AEC, ACE, æquales; cum ostensi sint æquales angulis ęqualibus BAD, & DAC; quare
d 6. 1. latera AC, AE, [d] sunt æqualia.

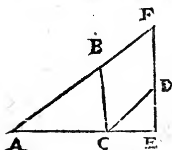


Iam vero si est vt BD ad DC, ita BA,
e 2. 6. ad AC, [e] ductâ vt prius CE, parallelâ ipsi AD, erit vt BD, ad DC, ita BA ad AE;
f 9. 5. [f] æquales ergo sunt AE & AC, [g] quare
g 5. 1. anguli quos subtendunt nimirũ AEC, ACE sunt æquales: sed hos ostendemus vt prius esse æquales angulis BAD, DAC; sunt ergo anguli BAD, DAC, pares inter se; ac proinde angulus BAC sectus est bifariam. Si ergo trianguli angulus &c.

Pro-

Propo. 4. Theor. 4.

Æquiangulorum triangulorum latera circa æquales angulos sunt proportionalia, & latera æqualibus angulis subtensa sunt homologa.



Sint triangula ABC, CDE, æquiangula, habẽtia singulos angulos æquales, A ipsi DCE; ABC, ipsi CDE; ACB, ipsi E; quę triangula sic constituantur vt latus AC, lateri CE, iaceat in directum. necnon productæ AB, occurrat ED in puncto F. *a* Quia ergo anguli ACB, CED sunt pares, rectæ BC, & FE, erunt parallelæ: parallelæ item AF, & CD, ob ęquales angulos BAC & DCE; eritque DB, parallelogrammum, *b* ac proinde latera opposita ęqualia. *a* 28. 1. *b* 34 1.

Nunc vero quia in triangulo AEF ducta est BC, ipsi FE parallela, erit
vt AB ad BF seu CD, *c* ita AC ad CE. *c* 2. 6.
Et permu. vt AB ad AC *d* ita CD ad CE. *d* 16. 5.
Similiter quia CD ipsi AF est parallela, erit

vt EC

e 2. 6. vt EC ad CA, ita e ED ad DF seu CB. Cum ergo sit vt AB ad AC, ita CD ad CE. Et vt AC ad CB, ita CE ad ED; habētur ternę & ternę magnitudines in eadē ratione AB, AC CB. CD, CE, ED.
f 22. 5. Quare ex æquo vt AB ad CB ita f CD ad ED. Sunt ergo latera omnia triangulorum proportionalia & quæ æqualibus angulis subtenduntur, sunt etiam homologa, seu eiusdem rationis; nam antecedentia & consequentia sub æqualibus sunt angulis: Æquiāgulorum ergo &c.

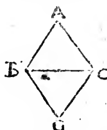
Propos. 5. Theor. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, erunt æquiangula; eosque angulos habebunt æquales, quibus homologa latera subtenduntur.

Est conuersa præcedentis vt si triangula ABC, DEF, habent latera proportionalia, hoc est, si sit vt AB ad AC, ita DE ad DF, &c. erit etiam angulus A angulo D, æqualis, &c. vt vult propositio. Constituantur enim ad rectam BC anguli GBC, GCB, ipsis E, & F, æ-
a 32. 1. quales; a vt proinde etiā angulus G, angulo D, sit ęqualis, vnde sequetur triangula

gula BGC, DEF esse æquiangula, [b] & eorum latera proportionalia, Tunc ve- [b] 4. 6.





ro quia DE & DF habẽt [c] eandem proportionem ad AB & AC, quam ad GB & GC, [c] necesse est AB ipsi GB, & AC, ipsi GC æqualem esse: [d] cumque BC sit communis, tota triangula ABC, BGC sunt æqualia, & æquales anguli omnes. Cum ergò ABC, & DEF eidem tertio BGC, sint æquiangula, inter se quoque erunt æquiangula; sunt vero illi ęquales anguli quibus homologa latera subtenduntur: nam anguli A & G æquales sunt, quibus commune BC subtensum est, &c, Si ergo duo triangula &c.

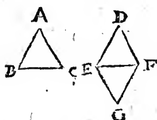
[c] 11. 5.
[d] 8. 1.



Pro-

Propo. 6. Theore. 6.

Si duo triangula vnum habeant æqualem angulum, & latera circa eum proportionalia, erunt æquiangula, angulosque habebunt æquales quibus æqualia latera subtenduntur.



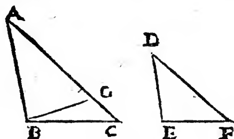
In triãgulis A B C, DEF, si ęquales sint anguli A & D, sitque vt A B, ad AC, ita DE ad DF, erunt & reliqui anguli æquales &c: constituantur enim ad rectam EF, anguli EFG, GEF, ęquáles ipsis B, & C, vt propositione superiori. Quia ergo æquiangula sunt ABC, GEF, *a* erunt AB, AC, & GF, GE, proportionalia: sed sunt etiam proportionalia AB, AC, & DE, DF, *b* sunt ergo latera DE; DF, ipsis GF, GE ęqualia. *c* Cumque basis EF sit communis, tota triangula DEF, EFG ęqualia & ęquiangula sunt. Quia ergo triangula A B C, DEF, vni tertio EFG sunt æquiangula, inter se quoque erunt æquiangula &c.

a 4. 6.
b 11. 5.
c 8. 1.

Pro-

Propo. 7. Theore. 7.

Si duo triangula vnum angulum æquale, & latera circa alteros angulos habeãt proportionalia, vtrũq; vero angulorũ reliquorum aut minorẽ recto; aut non minorem; æquiangula erunt triangula, & angulos circa quos latera sunt proportionalia, habebunt æquales.



Hoc eſt; ſi duo triangula ABC, DEF habeant vnum angulum, puta A, ipſi D æqualem, circa alteros vero puta B, & E, latera ſint proportionalia, ac denique ſi tertij anguli C & F, ſint vterque minor, aut vterque non minor recto; erunt hæc triangula æquiangula. Sint primum tertij anguli C & F vterq; minor recto: quod ſi tunc negas angulos

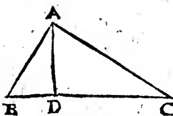
gulos ABC, DEF, circa quos latera sũt proportionalia, esse æquales, sit maior ABC, in quo constituatur ABG, ipsi DEF ęqualis, cũque in triangulis ABG, DEF, duo anguli D & E, duobus A, &
a 32. 1. AGB, sint æquales, a tertius F, tertio ABG erit ęqualis, ac proinde tota triã-gula æquiangula. b Est ergo vt DE, ad
b 4. 6. DF, vel vt AB, ad BC, (nam ex hypothesi eadem est inter vtraque ratio) ita
c 11. 5. AB ad BG; esset c ergo sicut AB, ad BC, ita AB, ad BC, d quare rectæ BC, BG,
d 9 5.
e 5. 1. essent æquales e & consequenter pares erunt anguli BGC, BCG; & cum BCG positus sit minor recto, etiam BGC minor erit recto: si ergo BGC, est minor
f 13. 1. recto, angulus BGA maior f erit recto, quem tamen ostendimus æqualem esse angulo F, hoc est, minorem recto, cum angulus F positus sit recto minor: idem ergo angulus BGA esset maior & minor recto, quod est absurdum. Nõ possunt ergo anguli ABC, BEF, esse inæquales, quare & tertius F, tertio ACB ęqualis erit, & triangula ABC, DEF, æquiangula.

Quod si tertij anguli C & F, ponantur vter-

vterq;non minor recto, negetur tamẽ angulos E & ABC, esse æquales rursus probabitur rectas BC, BG, & angulos BCG, esse æquales; & cum positum sit hunc non esse minorem recto, nec ille esset minor recto *f* quod est absurdum nam in triangulo BGC, essent duo anguli recti, aut rectis maiores. Si duo ergo triangula &c. *f* 17. 1.

Propo. 8. Theore. 3.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim ducta sit perpendicularis, quæ ad perpendicularem sunt triãgula, tum toti triangulo, tum inter se sunt similia.



In triangulo ABC sit angulus BAC rectus, & ex A ad basim BC ducatur perpendicularis AD. Quia ergo in triangulis ABC, ADC, anguli BAC, ADC recti sunt, & angulus C communis, *a* tertius ABC tertio DAC erit æqualis; ac proinde triangu- *a* 32. 1.

b 4. 6. la ABC, ADC sunt æquiangula, b & similia. Non aliter ostendetur triangulum ADB esse etiam simile toti triangulo ABC, ac proinde sunt etiam similia inter se triangula ABD ADC.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est perpendiculare ab angulo recto ad basim ductam, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: nam per 4. ostendetur esse vt CD, ad DA, ita DA ad DB, quod est rectam DA esse mediam proportionalem inter partes basis CD, DB.

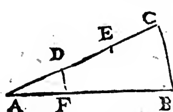
Propositio 9. Proble. 1.

A data recta linea imperatam partem auferre.

Ex recta AB auferenda sit prs tertia. Ducatur ergo ex A recta AC, faciens angulum cum AB vtcunque; tum ex AC sumatur quæuis pars puta AD, ac duæ aliæ addantur æquales DE, EC, iungaturque CB; cui parallela fiat DF. Eritque ablata AF, pars tertia ipsius AB. Nam quia in triangulo ABC ducta

a 2. 6. est DF, ipsi BC parallela, a erit sicut AD

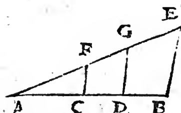
ad



ad DC, ita AF ad FB, *b* & componendo ſicut AC ad AD ita AB ad AF; eſt autẽ AD pars tertia ipſius AC, ergo AF eſt etiam pars tertia ipſiu AB. A data ergo recta &c. *b* 15. 5.

Propoſi. *10.* Proble. *2.*

Datam rectam inſectam ſimiliter ſecare, vt ſecta fuerit data altera recta.

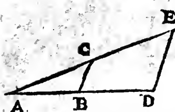


Data recta AB ſecta ſit in C & D, oporteatque rectã AE (quæ applicetur ad A vt cum recta AB angulũ vtcunque conſtituat) in ſimiles partes ſecare. Iunctâ rectâ BE ducantur CF, DG, ipſi BE parallelę. Iam vero quia in triangulo ABE ductæ ſunt CF, DG, lateri BE parallelæ, *a* ſectiones laterum AB AE ſunt proportionales. Componendo ergo ac diuidendo oſtendetur omnem eam proportionem, quæ eſt in- *a* 2. 6.

ter partes ipsius AB, eandem quoque esse inter partes lineæ AE. Datam ergo rectam &c.

Propositio 11. Proble. 11.

Datis duabus rectis tertiam proportionalem inuenire



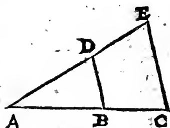
Datæ rectæ AB, A C angulũ quemuis cõstituant, puta B A C, iungaturq; recta C B. Mox productis lateribus AB A C, sumatur ipsi AC æqualis BD, ducatutque DE ipsi BC parallela; eritque recta C E tertia proportionalis quæsita. Nam quia BC ipsi DE est parallela, *a* erit vt AB ad BD, ita AC ad C E; est autem BD ipsi A C æqualis; *b* Est ergo vt AB ad AC, ita AC ad CE; quod est rectam CE esse tertiam proportionalem.

a 2. 6.
b 7. 5.

Pro-

Propo. 12 Proble. 4.

Tribus datis rectis quartam proportionalem inuenire.



Duæ quęlibet ex datis, puta AB & BC, in directum collocentur, tertia vero A D, cum ipsa AC angulum vtcunque constituat, iunctâque rectâ BD, agatur ipsi parallela CE; eritque recta DE quarta proportionalis quęsita. Nam quia ipsi CE parallela est DB. *a* erit vt AB ad BC, ita AD, ad DE. Tribus ergo datis AB, BC, AD, inuenta est quarta proportionalis DE.

Propo. 13. Proble. 5.

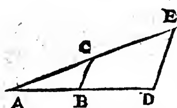
Datis duabus rectis mediam proportionalem inuenire.

Datæ rectæ AB, BC in directum collocentur, & super AC constituatur se-

ter partes ipsius AB, eandem quoque esse inter partes lineæ AE. Datam ergo rectam &c.

Propositio 11. Proble. 11.

Datis duabus rectis tertiam proportionalem inuenire



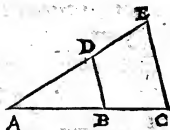
Datæ rectæ AB, A C angulũ quemuis cõstituant, puta B A C, iungaturq; recta C B. Mox productis lateribus AB A C, sumatur ipsi AC æqualis BD, ducatutque DE ipsi BC parallela; eritque recta C E tertia proportionalis quæsita. Nam quia BC ipsi DE est parallela, *a* erit vt AB ad BD, ita AC ad C E; est autem BD ipsi A C æqualis; *b* Est ergo vt AB ad AC, ita AC ad CE; quod est rectam CE esse tertiam proportionalem.

a 2. 6.
b 7. 5.

Pro-

Propo. 12 Proble. 4.

Tribus datis rectis quartam proportionalem inuenire.



Duæ quælibet ex datis, puta AB & BC, in directum collocentur, tertia vero A D, cum ipsa AC angulum vtcunque constituat, iunctâque rectâ BD, agatur ipsi parallela CE; eritque recta DE quarta proportionalis quæsita. Nam quia ipsi CE parallela est DB, *a* erit vt AB ad BC, ita AD, ad DE. Tribus ergo datis AB, BC, AD, inuenta est quarta proportionalis DE.

Propo. 13. Proble. 5.

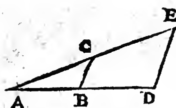
Datis duabus rectis mediam proportionalem inuenire.

Datæ rectæ AB, BC in directum collocentur, & super AC constituatur se-

ter partes ipsius AB, eandem quoque esse inter partes lineæ AE. Datam ergo rectam &c.

Propositio 11. Proble. 11.

Datis duabus rectis tertiam proportionalem inuenire



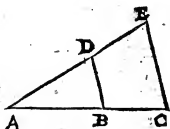
Datæ rectæ AB, A C angulũ quemuis cõstituant, puta B A C, iungaturq; recta C B. Mox productis lateribus AB A C, sumatur ipsi AC æqualis BD, ducatutque DE ipsi BC parallela; eritque recta C E tertia proportionalis quæsita. Nam quia BC ipsi DE est parallela, *a* erit vt AB ad BD, ita AC ad C E; est autem BD ipsi A C æqualis; *b* Est ergo vt AB ad AC, ita AC ad CE; quod est rectam CE esse tertiam proportionalem.

a 2. 6.
b 7. 5.

Pro-

Propo. 12 Proble. 4.

Tribus datis rectis quartam proportionalem inuenire.



Duæ quęlibet ex datis, puta AB & BC, in directum collocentur, tertia vero AD, cum ipſa AC angulum vtcunque conſtituat, iunctâque rectâ BD, agatur ipſi parallela CE; eritque recta DE quarta proportionalis quęſita. Nam quia ipſi CE parallela eſt DB. *a* erit vt AB ad BC, ita AD, ad DE. Tribus ergo datis AB, BC, AD, inuenta eſt quarta proportionalis DE.

Propo. 13. Proble. 5.

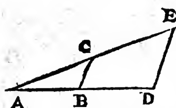
Datis duabus rectis mediam proportionalem inuenire.

Datæ rectæ AB, BC in directum collocentur, & ſuper AC conſtituatur ſe-

ter partes ipsius AB, eandem quoque esse inter partes lineæ AE. Datam ergo rectam &c.

Propositio 11. Proble. 11.

Datis duabus rectis tertiam proportionalem inuenire



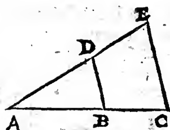
Datæ rectæ AB, A C angulũ quemuis cõstituant, puta B A C, iungaturq; recta C B. Mox productis lateribus AB A C, sumatur ipsi AC æqualis BD, ducatutque DE ipsi BC parallela; eritque recta C E tertia proportionalis quæsita. Nam quia BC ipsi DE est parallela, *a* erit vt AB ad BD, ita AC ad C E; est autem BD ipsi A C æqualis; *b* Est ergo vt AB ad AC, ita AC ad CE; quod est rectam CE esse tertiam proportionalem.

a 2. 6.
b 7. 5.

Pro-

Propo. 12. Proble. 4.

Tribus datis rectis quartam proportionalem inuenire.



Duæ quęlibet ex datis, puta AB & BC, in directum collocentur, tertia vero AD, cum ipsa AC angulum vtcunque constituat, iunctâque rectâ BD, agatur ipsi parallela CE; eritque recta DE quarta proportionalis quęsita. Nam quia ipsi CE parallela est DB. *a* erit vt AB ad BC, ita AD, ad DE. Tribus ergo datis AB, BC, AD, inuenta est quarta proportionalis DE.

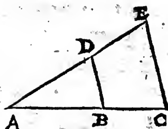
Propo. 13. Proble. 5.

Datis duabus rectis mediam proportionalem inuenire.

Datæ rectæ AB, BC in directum collocentur, & super AC constituatur se-

Propo. 12 Proble. 4.

Tribus datis rectis quartam proportionalem inuenire.

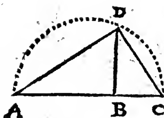


Duæ quęlibet ex datis, puta AB & BC, in directum collocentur, tertia vero A D, cum ipsa AC angulum vtcunque constituat, iunctâque rectâ BD, agatur ipsi parallela CE; eritque recta DE quarta proportionalis quęsita. Nam quia ipsi CE parallela est DB. *a* erit vt AB ad BC, ita AD, ad DE. Tribus ergo datis AB, BC, AD, inuenta est quarta proportionalis DE.

Propo. 13. Proble. 5.

Datis duabus rectis mediam proportionalem inuenire.

Datæ rectæ AB, BC in directum collocentur, & super AC constituatur se-



micirculus ADC: nam ad punctum B excitata perpendicularis vſque ad ſectionem ſemicirculi in D, erit media proportionalis quęſita. Ductis enim rectis AD, DC,[a] erit angulus ADC, rectus, & à vertice D, ad baſim AC ducta perpendicularis DB.[b] Quare inter partes baſeos AC, media proportionalis eſt DB.

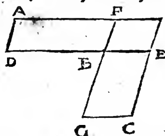
a 31. 3.
b corol. 8. 6.

Propoſitio 14. Theore. 9.

Æqualium & vnum vni angulum æqualem habẽtium parallelogrammorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos: Et quorum latera circa vnum angulum æqualem ſunt reciproca, ea parallelogramma ſunt æqualia.

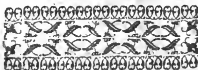
Sint AB, BC, parallelogramma æqualia, habentia angulos ad B æquales, atque ita collocentur, vt latus BE, lateri DB iaceat in directum, ac proinde etiam

tiam G B, ipsi B F. Dico igitur esse vt DB, ad BE, ita GB, ad BF. Perfecto enim



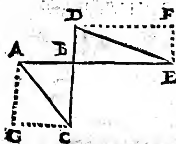
parallelogrammo EF, cum parallelogramma AB, BC, sint ęqualia, *a* sicut vnum AB est ad EF, ita alterum BC ad idem EF; sed vt AB ad FE, *b* ita est latus DB ad BE; & vt BC ad FE, ita latus GB ad B F, ergo est vt DB ad BE, ita *c* GB ad BF. Quod erat demonstrandum. *a* 7. 5. *b* 1. 6. *c* 11. 5.

E conuerso autem si ponantur latera circa ęquales angulos ad B, esse reciproca, ostendetur parallelogramma esse æqualia, nam si est vt DB ad BE, *a* ita GB, ad BF; erit etiam vt DB ad BE, ita AB ad FE; item vt G B ad B F, ita BC ad FE, *b* quare est etiam vt AB ad FE, ita BC ad idem FE. Paralllelogramma igitur AB, BC, sunt æqualia. *a* 1. 6. *b* 9. 5



Propositio 15. Theor. 10.

Æqualium & vnum vni angulum æqualem habentium triangulorum reciproca sunt latera. Et quorum latera circa æquales angulos sunt reciproca, ea triangula sunt æqualia.

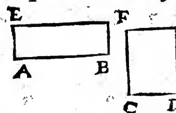


Patet propositio ex præcedente: nam triangula sunt dimidium parallelogrammorũ, quæ sub duobus lateribus triangulorum ęquales angulos continentibus describi possunt; quæ ergo est ratio parallelogrammorum & laterum, eadem est triangulorum; vt si sint triangula æqualia ABC, BDE, quibus æquales sint anguli ad B; ponatur BE ipsi AB, in directum, & ex consequenti DB ipsi BC, perficianturque parallelogramma BG, BF. Tunc vero per preced. erunt latera circa angulos ad B, reciproca, quę eadem sunt latera triangulorum. Eadē me-

methodo demõſtrabitur poſterior pars propoſitionis.

Propoſ. 16. Theore. 11.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, erit quod ſub extremis continetur rectãgulum, æquale ei quod ſub medijs. Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei quod ſub medijs, quatuor illæ lineæ ſunt proportionales.



Sint quatuor lineæ AB,CD,CF, A E, proportionales:quę ita collocentur vt AE, AB, & CF,CD, rectos ãgulos A,& C,cõtineãt,cõpleãturq; parallelogrãma BE & DF;quę dico eſſe ęqualia: nã latera circa æquales angulos A & C,reciprocãtur ex hypotheſi. Sunt a ergo parallelogramma ęqualia;quorum BE ſub extremis lineis, DF ſub medijs continetur.

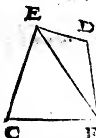
E conuerſo ſi ſub ijſdem lineis conſtituantur parallelogramma, angulis A & C exiſtentibus rectis, eaque parallelogramma ſint æqualia, b erunt latera a 14. 6.
circa

E conuerso si quadratum mediæ CD rectangulo sub extremis æquale ponatur, ostendetur tres illas lineas esse proportionales, vt in prop. præce. Si ergo tres rectæ &c.

Proposi.18. Proble. 6.

Super data recta dato rectilineo simile, similiterque positum describere.





Sit data recta A B, datũ rectilineum C D, in quo ducatur recta EF. Deinde ad puncta A & B rectæ AB constituantur anguli A & ABH æquales ipsis C & CFE; *a* erit proinde reliquus AHB reliquo CEF æqualis, & triangula tota AHB, CEF æquiangula, *b* & latera proportionalia. Amplius ad puncta H & B rectæ HB constituantur HBG, BHG, ipsis EFD, FED ęquales, & proinde reliquus G reliquo D erit æqualis, & triangula, vt prius, æquiãgula, lateraque proportionalia. Et factum

a 32. 1.

b 4. 6.

ctum est quod petitur. Nam cum triãgula partialia rectilineotum AH & CD ostensa sint omnibus angulis æqualia, & omnibus lateribus proportionalia, sunt eæ figuræ similes, & similiter positæ. Quod si rectilineum datũ plures angulos quam quatuor contineret, pluries esse repetenda æqualium angulorum constructio, pluribus quã duobus triangulis constitutis, & demonstratio procedet vt prius. Super data ergo recta &c.

Propo. 19. Thore. 3.

Similia triangula sunt in duplicata ratione suorum laterum homologorum.



Sint ABC, DEF triangula similia, habentia angulos B & E æquales. Dico triangulum ABC ad DEF, duplicatam habere

habere eam proportionem, quæ est inter latera homologa B C, E F. *a* Sumatur enim ipsarum BC, E F, tertia proportionalis B G, vt sit sicut BC ad E,F, ita EF ad B G; ducaturque A G. Sunt ergo ex positis. *a* 11. 6.

Vt AB ad BC, ita DE ad EF.
Permut. Vt AB ad DE ita BC ad EF.
Sed Vt BC ad EF, ita EF ad BG;

Triangulorum igitur ABG, DEF latera circa æquales angulos B & E sunt reciproca, *b* ac proinde triangula ABC DEF sunt æqualia. Et quia est vt BC ad ad EF, ita EF ad BG, *c* habet BC ad BG duplicatam eam rationem quam habet ad EF. vt vero BC ad BG, *d* ita est triangulum ABC ad triangulum DEF, & illi equale ABG: quare ABC tam ad triãgulum DEF, quam ad ABG duplicatam habet eam proportionem quæ est inter latera homologa, BC & EF. Similia ergo triangula &c. *b* 15. 6. *c* 11. 5. *d* 1. 6.

Corollarium.

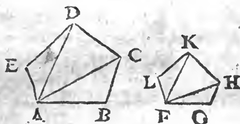
Ex his patet si tres lineæ proportionales fuerint, esse vt primam ad tertiam ita triãgulum super prima descriptum ad simile similiterque positum super secunda. Nam

osten-

ostensum est esse vt BC ad BG, ita triangulum ABC super prima BC, ad triangulum DEF simile similiterque positum super secunda EF.

Propo. 20. Theor. 14.

Similia poligona in similia triangula diuiduntur, numero æqualia & totis homologa. Et polygona duplicatam inter se eam habent rationem, quæ est inter latera homologa.



Sint polygona similia ABCDE, FGHkL; sintque anguli EAB, LFG æquales angulus vero G angulo B, & sic ordine deinceps: sint denique latera circa æquales angulos proportionalia, vt EA ad AB ita LF ad FG &c; ideoque latera AB, FG, &c, erunt homologa.
Dico primo, hæc poligona ductis rectis rectis AD AC, FK, FH, diuidi in triangula

gula similia. Nam quia angulus B æqualis est angulo G, & latera circa hos angulos proportionalia, *a* æquiangula erunt triãgula ABC, FGH & similia: eadem ratione ostendetur triãgula DAE, kFL esse simila, ob æquales angulos E & L. Nunc vero *b* quia est vt AC ad CB ita F H ad H G (ob similia triangula ACB, F H G) & vt CB ad CD ita HG ad HK ob similia polygona; collocabuntur iuxta 22. 5. ternæ & ternæ magnitudines.

a 6. 6.

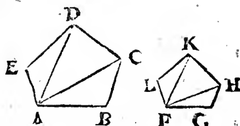
b 4. 6.

A C CB CD. FH GH HK.
Ergo ex *æ*quo vt AC ad CD ita FH ad HK *c* 22. 5.

Et quoniam angulus B C D, ipsi GHk est æqualis, & ablatus ACB, ablato FH G, erunt reliqui ACD, FHk etiam æquales. *d* Quare triangula ADC, FkH erunt æquiangula & similia, cum circa æquales angulos A C D, FHk habeant latera proportionalia. Omnia ergo triangula polygonorum ostensa sunt similia.

d 6. 6.

Dico secundo esse totis homologa, hoc est sicut vnum triangulum ad triãgulum sibi respondens alterius polygoni, ita esse polygona tota inter se. Quia enim



e 19. 6. enim similia sunt triãgula ABC, FGH, erũt in duplicata ratione laterum homologorum AC, FH; & ob eandem caussam triangula ACD FHK, sunt in duplicata ratione eorundem laterum AC, FH. Quare vt triangulum ABC ad F G H, ita ACD ad F H k, similiterque ostendetur triangula AED, FLk esse in eadem duplicata ratione laterum eorundem AC, F H: sunt ergo triangula polygonorum proportionalia. Cum f 12. 5. vero quotcunque magnitudines f quotcunque magnitudinum sunt proportionales, sicut est vna ad vnam ita omnes ad omnes. Est ergo polygonun ad polygonum sicut triangulum ad triangulum.

Dico tertio, polygona esse in duplicata ratione larerum homologorum g 9. 6. AB, FG. Nam quia triangula sunt g in duplicata ratione laterum, & polygona

sunt

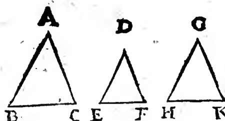
ſunt vt triangula, erunt etiam polygona in duplicata laterum ratione. Similia ergo polygona &c.

Corollarinm.

Eadem methodo probabitur omnes figuras rectilineas eſſe in duplicata ratione laterum homologorum.

Propo. 21. Theor. 15.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.



Si enim figuræ A B C, G H k eidem D E F ſint ſimililes; quia anguli A & G ſũt vni D ęquales, erũt & inter ſe ęquales; & ita probabitur omnes angulos, omnibus angulis eſſe ęquales; & latera a circa eos eſſe proportionalia, ſi lateribus eiuſdem tertij ſint proportionalia, ac propterea A B C, GHk eſſe figuras ſimiles. a 11. 5.

Propositio 22. Theore. 16.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, rectilinea similia & similiter ab ijs descripta erunt proportionalia. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint, ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

A ———
B ——— E ——
C ———
D ——— F ——

Sint quatuor rectæ A, B, C, D proportionales; dico descriptis similibus rectilineis puta triangulis super A & B, & similibus seu triangulis seu alijs rectilineis super C & D, hæc rectilinea fore proportionalia. Sumatur enim ipsarum A & B tertia [a] proportionalis E, & ipsarum C & D, tertia proportionalis F; eritque ex æquo vt A [b] ad E, ita C ad F. Vt autem A ad E, ita est rectilineum [c] super A ad rectilineũ super E; & vt C ad F; ita etiam earum rectilinea. Ergo vt rectilineum super A ad rectilineũ super B, ita rectilineũ super C ad

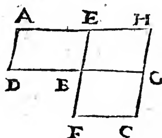
a 11. 6.
b 22. 5.
c 20. 6.

ad rectilineũ super D. Et sic probatum est rectilinea esse proportionalia.

E conuerso autem si rectilinea sint proportionalia, & similia similiterque posita; etiam latera erunt proportiona- [d] 20. 6. lia; nam rectilinea duplicatam [d] habent rationem illam eandem, quæ est inter latera.

Propo. 23. Theore. 17.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionẽ habent ex laterũ proportionibus compositam.

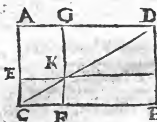


Sint parallelogrãma AB, BC, habentia angulos ad B æquales; & ita disposita vt DB ipsi BG iaceat in directum, compleaturque parallelogrammum BH. Cum ergo sit vt AB [a] ad [a] 1. 6. BH ita DB ad BG; & vt BH ad BC ita EB ad BF, erit proportio ipsius AB ad BC composita [b] ex proportionibus in- [b] 5. def. 6. ter AB, BH, & inter BH, BC; cumque

hę rationes eædem sint [c] cum ijs quæ
c 20. 6. sunt inter latera DB, BG, & inter latera EB, BF; erit quoque proportio ipsius AB ad BC composita ex proportionibus laterum eorundem, quod erat demonstrandum.

Propos. 24. Theor. 18.

In omni parallelogrammo, quę circa diametrum sunt parallelogrāma, & toti, & inter se sunt similia.



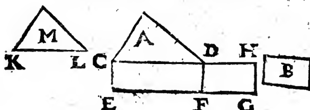
In parallelogrammo AB circa diametrū CD sint parallelogrāma E F & G H', quæ dico esse & toti, & inter se similia. Nam quia parallelogrammum GH habet angulum ad D communem cum toto, & angu-
a 29. 1. lus DHk ęqualis est [a] interno & opposito B; erunt etiam anguli H K G, KGD æquales reliquis A & ACB totius parallelogrammi; & eodem modo ostendetur angulos omnes parallelogrammi E F, angulis totius AB esse æqua-

quales. Iam vero quia triangula DkG, DKH *b* æquiãgula sunt,& similiter triãgula DAC, DBC; erit vt DA *c* ad AC, ita DG ad Gk; latera ergo circa æquales angulos A & G sunt proportionalia. Rursus vt AC ad CD ita Gk ad kD, & vt CD ad CB ita kD ad KH: Ergo ex equo *d* vt AC ad CB, ita GK ad KH; & sic latera circa equales angulos G K H, ABC sunt proportionalia. Neque aliter monstrabitur latera circa alios angulos æquales esse proportionalia. Sunt ergo parallelogramma EF, GH similia toti AB, ac proinde etiam *e* inter se. *b* 29. 1. *c* 4. 6. *d* 22. 5.

Proposi. 25. Proble. 7.

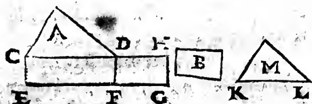
Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale cõstituere.

e 21. 6.



Sit constituendum rectilineum simile ipsi A, & equale alteri B. Fiat ergo *a* super CD parallelogrammum *a* 44. 1.

CF, æquale ipsi A, & super DF, in angulo FDH ęquali ipsi ECD, fiat parallelogrammũ DG, ipsi B æquale. Amplius
b 13. 6. rectarum CD, DH inueniatur b media proportionalis kL, super qua fiat recti-
c 18. 6. lineum M, simile c ipsi A, eritque rectilineum M factum vt proponitur. Est enim simile ipsi A ex hypothesi; esse autem ęquale ipsi B sic ostendo. Quia re-
d 20. 6. ctæ CD, KL, DH sunt proportionales, erit vt prima d CD ad tertiam DH, ita rectilineum super primam, id est A, ad



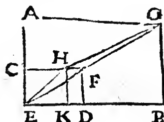
rectilineum super secundam id est ad
e 1. 6. M: sed vt CD ad DH, ita e parallelogrammum CF id est A, ad DH, hoc est ad B. Quare erit vt A ad B, ita A ad M, ideoque rectilinea B & M erunt ęqualia. Dato ergo rectilineo &c.



Pro-

Proposi. 26. Theore. 19.

Si à parallelogrammo auferatur parallelogrammũ simile toti, & communem vnum angulum cum eo habens, hoc circa eandem diametrum cum toto consistit.

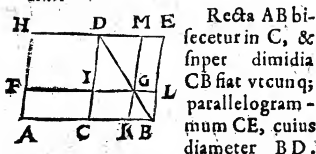


Ex parallelogrammo A B, auferatur simile C D, habens angulum eundem ad E cum toto, ducanturque rectæ EF, FG. quæ si non sunt diameter totius A B, sit ergo alia diameter, puta E H G, ducaturque HK ipsi FD parallela; eruntque Ck & AB [a] parallelogramma similia: est ergo vt AE ad EB, ita CE ad Ek; sed quia similia etiam ponuntur CD & AB est vt AE ad EB, ita CE ad CD; habet igitur CE eandem rationem ad EK & ED; quare EK & ED sunt æqualia, pars & totum, quod fieri nequit. Non est ergo diameter E H G, neque alia erit quam EFG: quod erat probandum.

[a] 24. 6.

Propo. 27. Theore. 20.

Omnium parallelogrammarum secundum eandem rectam applicatorum & deficientium figuris parallelogrammis similibus ei quod à media describitur, maximum id est quod ad mediam applicatur, simile existens defectui.



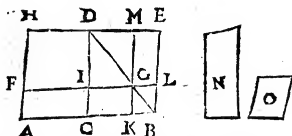
Recta AB bisecetur in C, & super dimidia CB fiat vtcunq; parallelogrammum CE, cuius diameter BD. Cōpleto ergo parallelogrammo BH, parallelogrammum AD erit super dimidium AC, deficietque à toto BH, parallelogrammo CE; estque AD simile defectui CE. Hoc igitur parallelogrammum AD dico esse maximum eorum quæ super AB posita deficiunt parallelogrammis similibus & similiter positis ipsi CE. Sumatur enim in recta DB quodcunque punctum, puta G, ducanturque KM & FL ipsis

ſis AB, BE parallelæ; eritque parallelogrammum AG poſitum ſuper AB,& deficiens ipſo kL quod ſimile eſt, & ſimiliter *a* poſitum ipſi CE. Dico ergo parallelogrammum AG minus eſſe ipſo AD. Quia enim æqualia ſunt FD, & DL ob baſes *b* æquales HD, DE, & DL maius eſt quam GE hoc eſt quam CG (ſunt enim CG & GE complemẽta ipſius CE, ideoque *c* æqualia) erit etiam FD maius quam CG, eodem exceſſu IM. Si igitur ipſis FD,CG commune addatur AI erit AD maius quam AG. Omnium ergo parallelogrammorum &c. *a* 24. 6. *b* 36. 1. *c* 43. 1.

Propoſitio 28. Proble. 8.

Ad datam lineam rectam dato rectililineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogrãma, quæ ſit ſimilis alteri datæ. Oportet autem datum rectilineum non eſſe maius parallelogrammo, quod ad dimidium datæ rectæ applicari poteſt, iuxta tenorem prec.prop.

Repetatur exemplum ſuperioris propoſi-



positionis, in quo ad rectam AB sit applicandum parallelagrammum æquale rectilineo N & deficiens parallelogrãmo quod sit simile ipsi O. Super dimidia ergo ipsius AB fiat parallelogrammum *a* CE, simile & similiter positum
a 18. 6. ipsi O, compleaturque parallelogrammum BH. Quod si contingeret CE vel AD ipsi N esse ęquale, factũ esset quod petitur. Si autem AD maius est quam N (nam minus esse non debet; cum enim AD sit omnium maximum quæ applicari possunt iuxta tenorem prop. præcedentis, si esset AD minus ipso N nullum aliud applicari posset ad AB æquale ipsi N) constituatur æquale excessui parallelogrammum IM, simile *b*
b 25. 6. similiterque positum ipsis O & CE, quodque propterea poni poterit circa
c 26. 6. *c* eandem diametrum DB. Iam vero pro-

productis rectis FL & LM, erit parallelogrammum AG applicatum rectæ AB deficiens parallelogrammo KL, simili ipsius IM, hoc est ipsius O. Idemque æquale est ipsi N. Nam quia ostensum est AG deficere ab AD, parallelogrammo IM, & rectilineum N ab eodē AD seu CE deficit eodem parallelogrammo IM, sequitur rectilineum N, & parallelogrammum AG esse ęqualia. Ad datam ergo rectam &c.

Propo. 29 Proble. 9.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens datam rectam figura parallelogramma, quæ similis sit dato alteri parallelogrammo.

Ad datam rectam AB sit applicandū parallelogrammum æquale rectilineo C, & excedens rectam AB parallelogrāmo simili ipsius D. Super recta ergo EB dimidia ipsius AB fiat parallelogrāmū cuiusuis magnitudinis, dummodo [a] simile sit ipsi D similiterque positum; fiatque rursus parallelogrammum GH simile eidem D, æquale [b] vero ipsis EF & C

a 18. 6.
b 25. 6.

& C simul sumptis; habeatque angulũ EKF communem cum parallelogrammo EF. Completis igitur parallelogrãmis OE, GB, NL, cum GH sit positum æquale ipsis EF & C simul sumptis, ablato communi EF, gnomon PQR ipsi C erit ęqualis. Et quia ob bases æqua-
c 36. 1. les *c* æqualia sunt OE & GB, æqualia
d 43. 1. item *d* complementa GB & BH, si loco ipsius BH substituatur æquale OE, erit parallelogrammum AM æquale gnomoni PQR; ideoque etiam rectilineo C. Quare ad rectam AB applicatum est parallelogrammum AM, æquale dato rectilineo C, excedens rectam AB figura parallelogramma NL, quæ similis est dato parallelogrammo D, cum sit circa eandem diametrum cum ipso EF,

quod

quod positum est simile ipsi D. Ad datã ergo rectam &c.

Propositio *30.* Proble. *10.*

Datam lineam rectam extrema ac media ratione secare.

A C B

Recta AB ita secetur in C, vt rectangulum sub *a* tota AB & segmẽto BC, sit æquale quadtato alterius segmenti AC; eritque recta AB secta extrema & media ratione: nam erit sicut AB, ad AC, ita AC ad CB. *a* 11. 2.

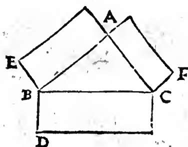
Propo. *31.* Theore. *21.*

In rectangulis triangulis figura quæuis super latere rectum angulum subtendente, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ super lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

In triangulo ABC latus BC subtendat angulum rectum BAC, & super BC descripta sit fignra *a* quęuis puta CD, cui similes & similiter positæ sint AE *a* 18. 6.

AF

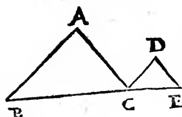
AF, ſuper lateribus angulum rectum continentibus. Quia ergo tres omnes figurę ſunt ſimiles, erunt in duplicata
b 20. 6. ratione laterum b homologorum; in qua etiam ratione eſſent quadrata eorundem laterum; ſed quadrata ſuper AB AC eſſent
c 47. 1. æqualia c quadrato ipſius B C, ergo etiam figuræ ſimiles ſuper iiſdē AB AC, ſunt ęquales ipſi CD. In rectangulis ergo triangulis &c.



Propoſi. 32. Theor. 22.

Si duo triangula habentia duo latera duobus lateribus proportionalia ad vnum angulum componantur, ita vt latera homologa ſint parallela, reliqua latera in directum erunt conſtituta.

Duo triangula ABC, DCE habentia latera proportionalia, hoc eſt vt AB ad AC



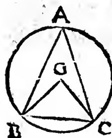
AC, ita DC ad DE, componantur ad cõstituẽdum angulum ACD; sintque tã antecedentia AB, DC, quam consequentia AC, DE parallela. Dico reliqua latera BC, CE iacere in directũ. Quia enim recta CD cadit in parallelas CA, ED; erunt *a* anguli alterni D & DCA æquales; æquales item BAC, & ACD cum etiam recta AC cadat in parallelas AB & DC; æquales ergo sunt anguli A & D, cum eidem tertio ACD ostensi sint ęquales; & cum circa eos latera sint proportionalia, æquiangula sunt *b* triãgula ABC, DCE; anguli ergo B & BCF sunt æquales; additis ergo æqualibus A & ACD, pares erunt duo anguli B & A, duobus DCE, ACD, siue toti ACE: rursusque addito communi ACB, erũt duo anguli ACB, ACE pares tribus A, B, & ACB; sed hi tres æquales sunt duobus rectis, *c* ideoque BC & CE *d* iacent in directum. Si ergo duo triangula.

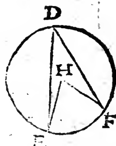
a 29. 1.
b 6. 6.
c 32. 1.
d 14. 1.

Pro-

Propo. 33. Theore. 23.

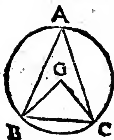
In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs quibus insistunt, siue ad centra siue ad peripherias constituti insistant. Eandem insuper proportionem habent sectores, quippe qui ad centra consistunt.

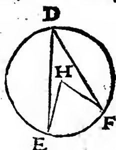




Sint æquales circuli ABC DEF, quorum centra G & H; & arcubus BC, EF insistant ad centra anguli BGC, EHF. Dico hos angulos esse inter se vt arcus BC & EF. Nam si arcus BC, EF,
a 27. 3. sunt æquales, a æquales sunt anguli BG C, EHF. Quare si alter arcus esset maior, puta BC, aut minor; maior quoque aut minor esset angulus BGC quã EHF,
b def. 5. 5. & sic quoque erit in b æquemultiplicibus; sunt ergo anguli BGC, EHF, sicut

arcus





arcus BC, EF.

Eodem modo probabitur angulos A & D qui insistunt ad ambitum, esse vt sunt ijdem arcus.

Denique sector rectis BG, GC & arcu BC comprehensus, est ad sectorem EHF, sicut arcus BC ad arcum EF. Nam si arcus sunt ęquales, æquales etiam erunt [c] ductæ rectæ BC EF; & anguli ad centra [d] G & H, & tota triangula [e] BGC, EHF æqualia, æquales item portiones circulorum quas auferunt [f] rectæ BC, EF, quare & sector BGC par erit ipsi EHF; quod si arcus BC maior esset ipso EF, cætera omnia essent maiora in circulo ABC, si minor, minora; & sic quoque erit [g] in æquæmultiplicibus: est ergo sector BGB, ad sectorem EHF, sicut arcus BC ad arcum EF. In æqualibus ergo &c.

c 29. 3.
d 27. 3.
e 4. 1.
f 28. 3.
g def. 5. 5.

R Corol-

Corollarium.

Hinc manifestum quoque est sic esse sectorem ad sectorem, sicut est angulus ad angulum; cum vtraque proportio eadem sit proportioni arcus ad arcum; quare & inter se eadem sunt.

FINIS.

AD MAIOREM DEI GLORIAM.



ERRATA.

E R R A T A.

Pagi. 1 lin. 7. *Corr.* lõgitudinem & latitudinem.
2.3. *Corr.* recta super rectam.
Item error p. 9. l. 22. p. 15. l. 5. p. 16. l. 2.
6 25. EGFA EG, FH
7.21. diuida dimidia.
8. 16. duabus duobus.
10. 2. *Corr.* cum latere.
25. 13. *Corr.* C internus.
28. 25. D G D H.
49. 14. per H per G.
53. 11. *Corr.* DB, BA, ipsis BC, BF.
63. 2, HI HF.
68. 25. *Corr.* in gnomone.
83. 3. *Corr.* dicitur.
85. 7. *Corr.* igitur.
Ibid. 11. C B C D.
89. 18. EC, ED, EC, & CD.
92. 20. H E, H F,
93. 8. EI, EL.
104. 17. ADC, ACD
115, 13. BAC, DAC
112. 11. AF. AE.
Ibid. 14. FD, ED.
137. 7. *Corr.* FGHK quadratum.
140. 1. *Corr.* rectæ AC.
155. 25. Qui Quia.
162. 14. fuerat fuerit.
168. 25. & G, & C.
170. 24. *Corr.* Proportio.
173. 21. *Corr.* B minor.
177. 14. *Corr.* A maior.
200. 24. AE AD.
209. 4. BCG, BGC.
220. 2. AH, AG
Ibid. 8. esse esset.
221. 12. ABC, ABG.
Ibid. 17. DEF, ABG.
Ibid. 18. ABG, DEF.
235. 1. LI, & KG.
237. 8. segmẽto minori BC.
239. 18. B & D C E.